Карасаев И.К.

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

I.K. Karasaev

THE SOLVABILITY CONDITION FOR THE PARTIAL DYNAMICAL SYSTEMS

УДК:517.956 (575.2)

В статье рассматриваются условия разрешимости для неполной динамической системы.

The article considers the conditions of solvability for the part-time dynamic systems.

Итак, рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}+q_1(t)\frac{dy}{dt}+q_0(t)y=0, \tag{1}$$

Особо отметим, что случай, когда $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a(t)dt=0$,

Тогда (1) представлено в виде [1]

$$\ddot{x}+a(t)\cdot x=0 \tag{2}$$

где $$a(t)=q_0(t)-\frac{1}{4}q_1^2(t)-\frac{1}{2}\dot{q}(t).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Динамическую систему, описываемую уравнением (1) будем называть полной , а (2), неполной.

Особо отметим, что здесь применяется новый, нетрадиционный метод, основанный на новых терминологиях, которые не относятся к общепринятым.

ТЕОРЕМА. Пусть $\Delta_1(\mu_0)=0$.

Тогда уравнение неполной динамической системы

$$\ddot{x}+a(t)x=0\ ,\ a(t)=q_0(t)-\frac{1}{4}q_1^2(t)-\frac{1}{2}\dot{q}(t). \tag{1}$$

разрешимо тогда и только тогда, когда вектор

$$\vec{z}=\left(\dots,A_{k_0}^{-2}(\mu_0),A_{k_0}^{-1}(\mu_0),A_{k_0}^{0}(\mu_0),A_{k_0}^{1}(\mu_0)A_{k_0}^{2}(\mu_0),\dots\right)$$

есть единственное, с точностью до постоянного, решение разрешающего уравнения (3), Разрешающее уравнение

$$A_1(\mu_0)\bar{z}=\vec{0}, \tag{3}$$

Необходимость. Пусть

$$x(t) = e^{\mu_0 t} z(t) = e^{\mu_0 t} \sum_{q=-\infty}^{\infty} z_q e^{iqt}, \tag{4}$$

есть решение уравнения (2), где вектор

$$\overline{z} = (\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$$

есть решение разрешающего уравнения.

Система, (3) соответствующая (1) однородна и матрица имеет декремент равный 1,то координаты вектора $\vec{z}$ пропорциональны алгебраическим дополнениям *(минорам)* элементов любой строки матрицы

$$z_q = A_k^q(\mu_0) \quad (q = \dots, -N, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, N, \dots),$$

где хотя бы один из миноров элементов строки k, отличен от нуля [4,с.364].

Таким образом, вектор (2) есть решение разрешающего уравнения (3.5.2.).

Достаточность. Известно, что для любого нормального определителя сумма произведений элементов любой строки на соответствующие алгебраические дополнения равна значению этого определителя. В данном случае равна 0, а сумма произведений алгебраических дополнений элементов одной строки на соответствующие элементы другой строки равна 0 $[4, c.364]$. Разлагая $\Delta_1(\mu)$ по элементам строк, имеем

$$p \neq k, \quad \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{(\mu + ip)^2 - \alpha} \right) \delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2 - \alpha} \right] A_k^q(\mu) = 0,$$

$$p = k, \quad \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{(\mu + ik_0)^2 - \alpha} \right) \delta_{k_0 q} + \frac{a_{k_0 - q}}{(\mu + ik_0)^2 - \alpha} \right] A_k^q(\mu) = 0.$$

Пусть вектор (2) есть решение разрешающего уравнения (1)

Тогда положим

$$x = e^{\mu t} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_k^q(\mu) e^{iqt}. \tag{5}$$

Легко проверить, что (5) есть решение уравнения (3) и что $A_k^q(\mu)$ есть алгебраические дополнения (миноры) элементов k строки, где, по крайней мере, одно отлично от нуля. Если же таких строк много, то в качестве k можно брать любую строку и ряд

$$z = \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} A_k^q(\mu) e^{iqt} \tag{6}$$

сходится абсолютно $[4, c.346]$ и z является периодической функцией.

Таким образом, решение можно представить в виде [51]

$$x = e^{\mu t} z, \tag{7}$$

где z определяется (6), $A_k^q(\mu)$ – миноры матрицы

$$\begin{pmatrix}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ldots 1+\frac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots\ \frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\alpha}+\ldots \\
\ldots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots+\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\alpha}\ldots \\
\ldots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha}+\ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{pmatrix},$$

где $\Delta_1(\mu) = detA^1(\mu)$ – поляризованный определитель.

Литература:

1. Каган В.Ф. Основания теории определителей. - Одесса: 1922. -393 с.
2. Якубович В. А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, - Москва.: Наука., 1972. - 718 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Керимбеков А.