Карасаев И.К.

КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕПОЛНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Karasaev I.K.

CANONICAL EQUATION FOR AN INCOMPLETE DYNAMIC SYSTEM

УДК 517.956 (575.2)

Придаем канонический вид уравнению

$$\sin^2 \pi i\mu = d(0)\pi^2. \qquad (1)$$

Заменяя синусы по формуле Эйлера и полагая $z=e^{\pi\mu}$, после элементарных преобразований данное уравнение можно записать в виде

$$z^2 + 2i\sqrt{\pi^2 d(0)} \cdot z - 1 = 0, \quad z = e^{\pi\mu}, \qquad (2)$$

где

$$d(0) = \quad [d(0)]_{pq} = \begin{cases} \delta_{pq} - \dfrac{a_{p-q}}{p^2}, & p \neq 0, \\ 0\delta_{pq} + a_{o-q}, & p = 0. \end{cases}$$

В развернутом виде

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \frac{-a_{-2+1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-0}}{2^2} & \frac{-a_{-2-1}}{2^2} & \frac{-a_{-2-2}}{2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{-1+2}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{-1-0}}{1^2} & \frac{-a_{-1-1}}{1^2} & \frac{-a_{-1-2}}{1^2} & \cdots \\ \cdots & a_{0+2} & a_{0+1} & 0 & a_{0-1} & a_{0-2} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{1+2}}{1^2} & \frac{-a_{1+1}}{1^2} & \frac{-a_{1-0}}{1^2} & 1 & \frac{-a_{1-2}}{1^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{-a_{2+2}}{2^2} & \frac{-a_{2+1}}{2^2} & \frac{-a_{2-0}}{2^2} & \frac{-a_{2-1}}{2^2} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=2a_{-1}a_1. \qquad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнение (2) будем называть каноническим для характеристических показателей для неполной динамической системы.

ТЕОРЕМА 1. Если $\omega = 2\pi^2 a_{-1}a_1 > 1$, то

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\omega} - \sqrt{\omega}\right) - \frac{i}{2}, \; d(0) = 2a_{-1}a_1 \qquad (4)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)} + \sqrt{\pi^2 d(0) - 1}\right) - \frac{i}{2},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d(0)}\right), \qquad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d(0)}\right) -$$

-показатели Ляпунова.

Доказательство. Пусть $\omega = 2\pi^2 a_{-1}a_1 > 1$, и в тоже время $d(0) = 2a_{-1}a_1$ и следовательно,

$$1 - \pi^2 d(0) < 0.$$

Решая уравнение, имеем

$$z_1 = \frac{1}{\pi} Ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d\left(0\right)} - i\sqrt{\pi^2 d\left(0\right)}\right) = \frac{1}{\pi}\ln\left(i\sqrt{\pi^2 d\left(0\right)-1} - i\sqrt{\pi^2 d\left(0\right)}\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\pi} Ln\left(-\sqrt{1-\pi^2 d\left(0\right)} - \sqrt{\pi^2 d\left(0\right)}\right) = \frac{1}{\pi}\ln\left(i\sqrt{\pi^2 d\left(0\right)-1} + i\sqrt{\pi^2 d\left(0\right)}\right),$$

Отсюда следует, что

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d\left(0\right)-1}\right) - \frac{i}{2}, \qquad (6)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(-i\sqrt{\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right) - \frac{i}{2}, \qquad (7)$$

а это есть (6), (7).Отсюда показатели Ляпунова есть

$$\lambda_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{\pi^2 d(0)} + \sqrt{\pi^2 d(0)-1}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.4.1. Имеет место равенство $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Доказательство.

Имеем, $\left(\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega - 1}\right) = \dfrac{\left[\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega-1}\right]\cdot\left[\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega-1}\right]}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\omega} - \sqrt{\omega-1}},$

Откуда получаем, что $\lambda_2 = -\lambda_1$.

ТЕОРЕМА 2. Если

$$0 < \omega < 1, \qquad (8)$$

то характеристические показатели

$$\mu_1 = -\frac{i}{\pi} arctg\sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}}, \qquad (9)$$

$$\mu_2 = \frac{i}{\pi} arctg\left(arctg\sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} - \pi\right). \qquad (10)$$

Доказательство. Решая уравнение (2), имеем

$$z_1 = \sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)},\ z = e^{\pi\mu},\ d(0) = 2\pi^2 a_{-1}a_1$$

$$z_2 = -\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - \sqrt{\pi^2 d(0)}.$$

$$2\pi^2 a_{-1}a_1 < 1, d(0) = 2a_{-1}a_1 \Rightarrow \pi^2 d(0) < 1 \Rightarrow 1 - \pi^2 d(0) > 0.$$

$$\left|-\sqrt{1-\pi^2 d(0)} \pm i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right| = 1,$$

и поэтому

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi} Ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\ln\left|\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right| + i arctg\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right)\right) =$$

$$= -\frac{i}{\pi} arctg\sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\omega = 2\pi^2 a_{-1}a_1 < 0$

то

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - \sqrt{-\pi^2 d(0)}\right) = \lambda - \text{ì ëàäø èéï î êàçàò åëü}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} + \sqrt{-\pi^2 d(0)}\right) = \Lambda - \text{ñò àðø èéï î êàçàò åëü.}$$

$$z_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right),$$

$$z_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(-\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - i\sqrt{\pi^2 d(0)}\right).$$

Отсюда имеем

$$\mu_1 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} - \sqrt{-\pi^2 d(0)}\right) = \lambda_1 \mathbf{<0}, \text{ -младший показатель,}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\pi}\ln\left(\sqrt{1-\pi^2 d(0)} + \sqrt{-\pi^2 d(0)}\right) = \Lambda - \text{Ñò àðø èéï î êàçàò åëü.}$$

Легко заметить, что

$$0 < \sqrt{\frac{\omega}{1-\omega}} = \gamma < 1. \qquad (11)$$

Следствие 2 Характеристические показатели можно разложить в степенные ряды.
Доказательство. Тогда имеем

$$\mu_1 = -\frac{i}{\pi}\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3} + \frac{\gamma^5}{5} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{\gamma^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \right),$$

$$\mu_2 = \frac{i}{\pi}\left(\gamma - \frac{\gamma^3}{3} + \frac{\gamma^5}{5} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{\gamma^{2n+1}}{2n+1} + \ldots - \pi \right).$$

Литература

1. Карасаев И.К. Построение фундаментальной системы решений уравнения Хилла //ВЕСТНИК Кыргызско – Российского Славянского университета – 2010.Том 10,№9.С.107–122.

2. Карасаев И.К.К построению фундаментальной системы уравнения Хилла//Сборник трудов Международной миниконференции «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения» (3.5 мая 2009г.).М.:Издательство МЭСИ,2010.(ISBN 978-5-7764-0607-2) С.104-108.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Керимбеков А.