Чекеев А.А., Касымова Т.Дж., Ташбаева Э.А.

РАВНОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ ОКРЕСТНОСТЕЙ

A.A. Chekeev, T.Zh. Kasymova, E.A. Tashbaeva

UNIFORM NEIGHBORHOODS SYSTEM

УДК: 515.12

Установлен переход от равномерных структур, определенных в терминах равномерной системы окрестностей, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерных покрытий, и, наоборот, от равномерных структур, определенных в терминах равномерных покрытий, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерной системы окрестностей. Это в дальнейшем станет аппаратом исследования алгебраических объектов, например, групп, колец, полей и др.

It is set the transition from a uniform structures determined by means of neighborhoods uniform system, on the uniform structures determined by means of a uniform coverings, and, conversely, from the uniform structures determined by means of a uniform coverings on the uniform structures determined by means of a neighborhoods uniform system. Further it will be the method for the study of algebraic objects such as groups, rings, fields, etc.

ВВЕДЕНИЕ

В книге Дж. Келли ([1]), ставшей учебником по общей топологии, введены равномерные системы окрестностей, посредством которых можно ввести равномерные структуры ([1], стр.270, задача 3.). Там же показано как переходить от равномерных структур, определенных в терминах равномерных систем окрестностей, на равномерные структуры, определенных в терминах окружений диагонали и комплекта псевдометрик, и наоборот.

Ниже установлен переход от равномерных структур, определенных в терминах равномерной системы окрестностей, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерных покрытий ([2]), и, наоборот, от равномерных структур, определенных в терминах равномерных покрытий, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерной системы окрестностей. Это в дальнейшем станет аппаратом исследования алгебраических объектов, например, групп, колец, полей и др..

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([1]). Пусть для каждой точки $x \in X$ непустого множества X задана система окрестностей $\left\{ V_a(x) : a \in \mathcal{A} \right\}$, где $x \in V_a(x)$ для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ $(\mathcal{A}, \leq)$ - направленное упорядоченное индексное множество, а именно:

$a \geq b$, тогда и только тогда, когда $V_a(x) \subseteq V_b(x)$.

Будем говорить, что система $\Sigma = \left\{ \left\{ V_a(x) : a \in \mathcal{A} \right\}, x \in X \right\}$ определяет на множестве X *псевдоравномерную систему окрестностей*, если выполнены следующие условия:

1^0. Для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ существует такой элемент $b \in \mathcal{A}$, что если $x \in V_b(y)$, то $y \in V_a(x)$.

2^0. Для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ существует такой элемент $b \in \mathcal{A}$, что если $y \in V_b(x)$ и $z \in V_b(y)$, то $z \in V_a(x)$.

Если выполнено дополнительно условие:

3^0. Для любых $x, y \in X$, $x \neq y$ существует такой элемент $a \in \mathcal{A}$, что $y \notin V_a(x)$.

Тогда будем говорить, что система $\Sigma = \left\{ \left\{ V_a(x) : a \in \mathcal{A} \right\}, x \in X \right\}$ определяет на множестве X *равномерную систему окрестностей.*

Напомним некоторые факты из [2].

Пусть X – непустое множество, а α и β – покрытия множества X. Говорят, что покрытие α *вписано* в покрытие β, если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$ и пишут $\alpha \succ \beta$. Если $\{\alpha_a : a \in M\}$ – произвольное семейство покрытий множества X, то внутренним пересечением семейства $\{\alpha_a : a \in M\}$ покрытий называется *покрытие*, состоящее из всех множеств виде $\cap\{A_a : a \in M\}$, где $A_a \in \alpha_a$ для любого $a \in M$ и обозначается через $\wedge\{\alpha_a : a \in M\}$ или $\bigwedge_{a \in M} \alpha_a$. Если α и β – два покрытия множества X, то их внутреннее пересечение: $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$.

Пусть α – покрытие множества X и $Y \subset X$. Множество $\alpha(Y) = \cup\{A \in \alpha:\ A \cap Y \neq \varnothing\}$ называется *звездой множества* относительно покрытия α. Если $Y = \{x\}$, то пишут $\alpha(x)$ вместо $\alpha(\{x\})$. Далее, положим $\alpha^* = \{\alpha(x):\ x \in \mathrm{X}\}$. Говорят, что покрытие α *звездно вписано* в покрытие β, если $\alpha^* \succ \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (0.1.1.[2].). Пусть X – непустое множество. Семейство $\mathscr{U}$ покрытий множества X называется *равномерностью на* X, если выполняются условия:

$(P1)$ Если $\alpha \in \mathscr{U}$ и α вписано в некоторое покрытие γ множества X, то $\gamma \in \mathscr{U}$.

$(P2)$ Для любых $\alpha_1 \in \mathscr{U}$, $\alpha_2 \in \mathscr{U}$ существует $\alpha \in \mathscr{U}$, которое вписано и в α_1, и в α_2.

$(P3)$ Для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует $\beta \in \mathscr{U}$, звездно вписанное в α.

$(P4)$ Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathscr{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y.

Пара $(\mathrm{X}, \mathscr{U})$, состоящая из множества X и равномерности $\mathscr{U}$ на нем, называется *равномерным* пространством. Если выполнены только условия $(P1)-(P3)$, то семейство $\mathscr{U}$ покрытий множества X называется *псевдоравномерностью* на X; а пара $(\mathrm{X}, \mathscr{U})$ – *псевдоравномерным* пространством.

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ называется *базой* равномерности $\mathscr{U}$, если для любого покрытия $\alpha \in \mathscr{U}$ существует такое покрытие $\beta \in \mathscr{B}$, что β вписано в α, т.е. $\beta \succ \alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (0.1.2.[2].). *Семейство $\mathscr{B}$ покрытий множества X будет базой некоторой псевдоравномерности (равномерности) $\mathscr{U}$ на X, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$(B1)$ *Для любой пары равномерных покрытий α, $\beta \in \mathscr{B}$ существует такое равномерное покрытие $\gamma \in \mathscr{B}$, которое вписано в α и в β.*

$(B2)$ *Для всякого равномерного покрытия $\beta \in \mathscr{B}$ существует равномерное покрытие $\gamma \in \mathscr{B}$, звездно вписанное в β.*

(Для базы равномерности дополнительно должно выполняться условие

$(B3)$ $\cap\{\beta(x):\ \beta \in \mathscr{B}\} = \{x\}$ *для любой точки* $x \in \mathrm{X}$).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже доказаны теоремы, показывающие переход от равномерных структур, определенных в терминах равномерной системы окрестностей, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерных покрытий ([2]), и, наоборот, от равномерных структур, определенных в терминах равномерных покрытий, на равномерные структуры, определенных в терминах равномерной системы окрестностей.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\Sigma = \{\{\mathrm{V}_a(x) : a \in \mathscr{A}\}, x \in \mathrm{X}\}$ – псевдоравномерная (равномерная) система окрестностей на непустом множестве X, тогда система $\mathscr{B}_\Sigma = \{\{\mathrm{V}_a(x) : x \in \mathrm{X}\}, a \in \mathscr{A}\}$ – база некоторой псевдоравномерности (равномерности) $\mathscr{U}$ на множестве X.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что семейство α_a является покрытием множества X для любого индекса $a \in \mathscr{A}$. Проверим для системы $\mathscr{B}_\Sigma$ выполнение условий (B1) – (B2) базы (предложение 0.1.2 .[2].).

(B1) Пусть $\alpha_a, \alpha_b \in \mathscr{B}_\Sigma$ любых $a, b \in \mathscr{A}$. Так как $\mathscr{A}$ – направленное множество, то существует такой индекс $c \in \mathscr{A}$, что $c \geq a$ и $c \geq b$, т.е. $\mathrm{V}_c(x) \subseteq \mathrm{V}_a(x)$ и $\mathrm{V}_c(x) \subseteq \mathrm{V}_b(x)$ для любого $x \in \mathrm{X}$. Это означает, что покрытие α_c вписано в покрытие α_a и в покрытие α_b, т.е. $\alpha_c \succ \alpha_a \wedge \alpha_b = \{\mathrm{V}_a(x) \cap \mathrm{V}_b(x) : a, b \in \mathscr{A}\}$ и $\alpha_c \in \Sigma$. Условие *(B1)* выполнено.

(B2) Пусть $\alpha_a \in \mathscr{B}_\Sigma$ – произвольное покрытие. Для любого индекса $a \in \mathscr{A}$, в силу аксиомы 2^0, найдется индекс $b \in \mathscr{A}$ и для найденного $b \in \mathscr{A}$ существует индекс $c \in \mathscr{A}$ удовлетворяющий аксиоме 1^0. Пусть индекс $e \in \mathscr{A}$ такой, что $e \geq b$ и $e \geq c$. Покажем, что покрытие α_e звездно вписано в покрытие α_a, т.е. покрытие $\{\alpha_e(x) : x \in \mathrm{X}\}$ вписано в покрытие α_a. Имеем $\alpha_e(x) = \bigcup\{\mathrm{V}_e(y) \in \alpha_e : x \in \mathrm{V}_e(y)\}$. Покажем, что

выполнено $\alpha_e(x) \subseteq V_a(x)$ для любой точки $x \in X$. Выберем произвольную точку $z \in \alpha_e(x)$. Тогда, в силу аксиомы 2^0, найдется такая точка $y \in X$, что $z \in V_e(y)$ и $x \in V_e(y)$ Так как по условию $e \geq b$ и $e \geq c$, то $z \in V_e(y) \subseteq V_b(y)$ и $x \in V_e(y) \subseteq V_c(y)$. Для индексов $b, c \in \mathscr{A}$ выполнена аксиома 1^0, следовательно, $y \in V_b(x)$. Так как для индексов $a, b \in \mathscr{A}$ выполнена аксиома 2^0, то из $z \in V_b(y)$ и $y \in V_b(x)$, следует, что $z \in V_a(x)$. Итак, включение $\alpha_e(x) \subseteq V_a(x)$, т.е. *(B2)* выполнено.

Из аксиомы 3^0 определения 1 следует выполнение условия *(B3)*, так как имеет место $\bigcap\{\alpha_a(x) : a \in \mathscr{A}\} = \bigcap\{\{V_a(x) : x \in X\} : a \in \mathscr{A}\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$. Теорема доказана полностью.

Пусть $(X, \mathscr{U})$ – псевдоравномерное (равномерное) пространство, $\mathscr{U}$ – псевдоравномерность (равномерность), заданная в терминах равномерных покрытий, и $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ – база псевдоравномерности (равномерности) $\mathscr{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Семейство $\mathscr{B}$ можно считать упорядоченным направленным множеством, т.е. порядок введем следующим образом:

$\alpha \leq \beta$ *тогда и только тогда, когда покрытие* β *вписано в покрытие* α, *т.е.* $\beta \succ \alpha$;

для любых покрытий $\alpha, \beta \in \mathscr{B}$ *существует такое покрытие* $\gamma \in \mathscr{B}$, *что* $\gamma \succ \alpha \wedge \beta$, *тогда* $\gamma \geq \alpha$ *и* $\gamma \geq \beta$

Будем считать упорядоченное направленное множество $\mathscr{B}$ индексным, а все равномерные покрытия – индексами. Для любого покрытия $\alpha \in \mathscr{B}$ и любой точки $x \in X$ положим $V_\alpha(x) = \alpha(x)$, тогда справедлива

ТЕОРЕМА 5. *Для псевдоравномерного (равномерного) пространства* $(X, \mathscr{U})$ *семейство* $\{\{\alpha(x) : \alpha \in \mathscr{B}\}, x \in X\}$ *образует псевдоравномерную (равномерную) систему окрестностей, где* $\mathscr{B}$ *– база псевдоравномерности (равномерности)* $\mathscr{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 5, индексное множество $\mathscr{B}$ направлено и упорядочено, следовательно, если $\alpha \leq \beta$, то $V_\beta(x) \subset V_\alpha(x)$

Проверим выполнение аксиом $1^0, 2^0$ (3^0 - для равномерности определения 1).

Действительно, пусть $\alpha \in \mathscr{B}$ – произвольное покрытие и $\beta \in \mathscr{B}$, такое что $\beta^* \succ \alpha$, т.е. $\{\beta(x) : x \in X\}$ вписано в покрытие α. Тогда, если $x \in V_\beta(y) = \beta(y)$, то найдется такой элемент $A_y \in \alpha$, что $x \in \beta(y) \subset A_y \in \alpha$. Отсюда следует, что $\beta(y) \subset \alpha(x)$, следовательно, $y \in \alpha(x) = V_\alpha(x)$. Аксиома 1^0 выполнена.

Пусть $\alpha \in \mathscr{B}$ – произвольное покрытие и такое покрытие $\beta \in \mathscr{B}$, что β дважды звездно вписано в α, т.е. $\{\beta(\beta(x)) : x \in X\}$ вписано в покрытие α. Покажем выполнение аксиомы 2^0. Пусть $y \in V_\beta(x) = \beta(x)$ и $z \in V_\beta(y) = \beta(y)$. Имеем $z \in \beta(y) \subseteq \beta(\cdot\beta(x)) \subset A_x \in \alpha$ для некоторого элемента $A_x \in \alpha$. Отсюда следует, что $z \in \alpha(x) = V_\alpha(x)$. Аксиома 2^0 выполнена.

Проверим выполнение аксиомы 3^0. Для любой пары точек $x, y \in X$, $x \neq y$ и любого $\alpha \in \mathscr{B}$ найдется такой элемент $A \in \alpha$, что, в силу аксиомы 3^0, $x \in A$ и $y \notin A$. Аксиома 3^0 выполнена. Терема доказана полностью.

Список использованных источников:

1. Келли Дж. Общая топология. - Москва: «Наука», 1981. - 432с.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.- Фрунзе: «Илим», 1990. 171с.

Рецензент: д.ф.-м., профессор Керимбеков А.