Каденова З.А.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Z.A. Kadenova

REGULARIZATION OF THE SYSTEMS LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

В настоящей статье доказана теорема о регуляризация решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article the theorem about regularization of decisions of systems of the linear integrated equations of the first sort with two independent variables in unlimited areas is proved.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)u(s,x)ds + \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds =$$
$$= f(t,x),\ (t,x)\in G,\ G=\{(t,x)\in R^2 : t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y),\ t_0 \le t < \infty, & a \le y \le x \le b; \\ B(t,x,y),\ t_0 \le t < \infty, & a \le x \le y \le b, \end{cases} \tag{2}$$

$$H(t,x,s) = \begin{cases} M(t,x,s),\ t_0 \le s \le t < \infty, & a \le x \le b; \\ N(t,x,s),\ t_0 \le t \le s < \infty, & a \le x \le b, \end{cases} \tag{3}$$

Предполагается, что $A(t,x,y), B(t,x,y), M(t,x,s), N(t,x,s)$ – являются непрерывные $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ – мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$G_1 = \{(t,x,y):\quad t_0 \le t < \infty,\quad a \le y \le x \le b\};$

$G_2 = \{(t,x,y):\quad t_0 \le t < \infty,\quad a \le x \le y \le b\};$

$G_3 = \{(t,x,s):\quad t_0 \le s \le t < \infty,\quad a \le x \le b\};$

$G_4 = \{(t,x,s):\quad t_0 \le t \le s < \infty,\quad a \le x \le b\}.$

$f(t,x)$-известная, $u(t,x)$ -неизвестная n -мерные вектор-функции Основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1,2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. Рассмотрена единственность, и устойчивость решений для одного класса интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными рассмотрена в [3].

Введем следующие обозначения:

1) Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим М, < . , . > - скалярное произведение в R^n, $\|A\|, \|u\|$ - нормы соответственно $\mathrm{n}\times\mathrm{n}$ - мерной матрицы $A=(a_{ij})\in M$ и n - мерного вектора u , т.е. для любых $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n),\ \vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n)\in R^n$

$\langle u,\vartheta\rangle = u_1\vartheta_1 + u_2\vartheta_2 + \ldots + u_n\vartheta_n,$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}, \quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2\right)^{1/2};$$

2) $L_{2,n}(G)$ - пространство n – мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_{2,n}(G)$ - т.е. для любого $u(t,x) \in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t,x)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\|u(t,x)\|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}};$$

3) $L_2((G^2);M)$ - пространство $n \times n$ - мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_2((G^2);M)$ - т.е. для любого $A(t,x,s,y) \in L_2((G^2);M)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\|A(t,x,s,y)\|^2 dydxdsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что ядро $\|C(t,x,s,y)\| \in L_2(G^2)$ и $C(t,x,s,y) = C^*(s,y,t,x), \ (t,x,s,y) \in G^2$, где C^* – сопряженная матрица к матрице C. Тогда матричное ядро $C(t,x,s,y)$ разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t,x,s,y) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\varphi_1^{(i)}(s,y),\dots,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right), \ l \le m \le \infty, \tag{4}$$

где $\left\{\left(\varphi^{(i)}(t,x)\right) = \left(\varphi_\nu^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ - ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из $L_{2,n}(G^2)$, $\{\lambda_i\}$ - последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей т.е.

$$|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots .$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &P(s,y,z) = A(s,y,z) + B^*(s,z,y),\\ &Q(s,y,\tau) = M(s,y,\tau) + N^*(\tau,y,s). \end{aligned} \tag{5}$$

где $B^*(s,z,y), \ N^*(\tau,y,s)$ – соответственно сопряженные матрицы к матрице $B(s,z,y), \ N(\tau,y,s)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1) Матрица $P(s,b,a), \ \lim\limits_{t\to\infty}Q(t,y,t_0), \ P_z(s,b,z), \ \lim\limits_{t\to\infty}Q_\tau(t,y,\tau)$ – неотрицательны соответственно при всех значениях $s \in [t_0,\infty), \ y \in [a,b], \ (s,z), \ (\tau,y) \in G,$

$\|P(s,b,a)\| \in C[t_0,\infty),\ \left\|\lim_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\right\| \in C[a,b],\ \|P_z(s,b,z)\| \in C(G),\ \left\|\lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)\right\| \in C(G);$

2) Матрицы $P_y(s,y,a),\ Q_s(s,y,t_0),\ P_{sy}(s,y,z),\ Q_{\tau s}(s,y,\tau)$ - неположительные

при всех значениях соответственно $(s,y) \in G,\ (s,y,z) \in G_2,\ (s,y,\tau) \in G_4,$

$\|P_y(s,y,a)\| \in C(G),\ \|Q_s(s,y,t_0)\| \in C(G),\ \|P_{zy}(s,y,z)\| \in C(G_1),\ \|Q_{\tau s}(s,y,\tau)\| \in C(G_3);$

3) Все собственные значения λ_ν, матричного ядра $C(t,x,s,y)$ - положительны.

В силу вполне непрерывности и самосопряженности оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, ортонормированная последовательность собственных вектор – функций $\left\{\left(\varphi^\nu(t,x)\right) = \left(\varphi_i^{(\nu)}(t,x)\right)\right\}$ - полна в $L_{2,n}(G)$.

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_{2,n}(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le c \right\}, \text{ где } c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \left\langle u(t,x), \varphi^{(\nu)}(t,x) \right\rangle dxdt, \ (\nu = 1,2,\dots,). \qquad (5)$$

Обе части системы (1) скалярно умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G. Далее используя формулы Дирихле и учитывая (4) имеем

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right), \int_a^b u(s,\nu)d\nu \right\rangle ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \left\langle P_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right), \int_a^y u(s,\nu)d\nu \right\rangle dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \left\langle P_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right), \int_z^b u(s,\nu)d\nu \right\rangle dzds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y \left\langle P_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right), \int_z^y u(s,\nu)d\nu \right\rangle dzdyds +$$

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left\langle \lim_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \left\langle Q_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dyds + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \left\langle \lim_{t\to\infty} Q_\tau(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_{t_0}^{s} \left\langle Q_{\tau s}(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle d\tau dyds +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty} \left\langle f(t,x), u(t,x) \right\rangle dtdx.$$

Отсюда вытекает единственность решений системы (1) в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Пусть $f(t,x) \in K(M_\alpha)$, где оператор K определено по формуле (1).

Тогда система (1) имеет решение $u(t,x) \in M_\alpha$ и из последнего равенства, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \left|\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b \langle f(t,x),u(t,x)\rangle dxdt\right|.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \|f(t,x)\|_{L_{2,n}}\|u(t,x)\|_{L_{2,n}}. \qquad (6)$$

С другой стороны

$$\|u(t,x)\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}}\cdot\lambda_\nu^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\cdot\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{-1}}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \qquad (7)$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p=\dfrac{1+\alpha}{\alpha},\ q=1+\alpha.$

Пусть $u(t,x)\in M_\alpha$. Тогда учитывая (6) из неравенства (7) имеем

$$\|u(t,x)\|_{L_2}^{\ 2} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}}\left(\|f(t,x)\|_{L_2}\|u(t,x)\|_{L_2}\right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}}\|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0<\alpha<\infty. \qquad (8)$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1)-3), $K(M_\alpha)\subset L_{2,n}(G)$- образ M_α при отображении К. Тогда решение системы (1) единственно в $L_{2,n}(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ оператор К$^{-1}$, обратный к К, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\dfrac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (8).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon\vartheta(t,x,\varepsilon)+\int_a^b K(t,x,y)\vartheta(t,y,\varepsilon)dy+\int_{t_0}^{\infty}H(t,x,s)\vartheta(s,x)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)\vartheta(s,y,\varepsilon)dyds=f(t,x),(t,x)\in G, \qquad (9)$$

где $\varepsilon>0$ - малый параметр будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α .

В самом деле, сделав следующую подстановку в системе (9)

$$\vartheta(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon),$$

где $u(t,x)\in M_\alpha$ - решение системы (1), получим

$$\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)+\int_a^b K(t,x,y)\xi(t,y,\varepsilon)dy+\int_{t_0}^{\infty}H(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)dyds=-\varepsilon u(t,x). \qquad (10)$$

Отсюда обе части системы (10) умножив на $\xi(t,x,\varepsilon)$ скалярно, и интегрируя по области G, и учитывая (4) и (5), имеем

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\int_a^b \xi(s,v,\varepsilon)dv, \int_a^b \xi(s,v,\varepsilon)dv\right\rangle ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P'_y(s,y,a)\int_a^y \xi(s,v,\varepsilon)dv, \int_a^y \xi(s,v,\varepsilon)dv\right\rangle dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P'_z(s,b,z)\int_z^b \xi(s,v,\varepsilon)dv, \int_z^b \xi(s,v,\varepsilon)dv\right\rangle dzds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y\left\langle P''_{zy}(s,y,z)\int_z^y \xi(s,v,\varepsilon)dv, \int_z^y \xi(s,v,\varepsilon)dv\right\rangle dzdyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle \lim_{t\to\infty} Q(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty} \xi(v,y,\varepsilon)dv, \int_{t_0}^{\infty} \xi(v,y,\varepsilon)dv\right\rangle dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle Q'_s(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s} \xi(v,y,\varepsilon)dv, \int_{t_0}^{s} \xi(v,y,\varepsilon)dv\right\rangle dsdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle \lim_{t\to\infty} Q'_\tau(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty} \xi(v,y,\varepsilon)dv, \int_{\tau}^{\infty} \xi(v,y,\varepsilon)dv\right\rangle dyd\tau -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\left\langle Q''_{\tau s}(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s} \xi(v,y,\varepsilon)dv, \int_{\tau}^{s} \xi(v,y,\varepsilon)dv\right\rangle d\tau dsdy +$$

$$+\varepsilon\left\|\xi(t,x,\varepsilon)\right\|_{L_2}^2+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2=-\varepsilon\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle u(t,x),\xi(t,x,\varepsilon)\right\rangle dtdx, \tag{11}$$

где $\xi_\nu(\varepsilon)$ - коэффициенты Фурье для функции $\xi(t,x,\varepsilon)$, по ортонормированной системе $\varphi^{(\nu)}(t,x)=\{\varphi_i^{(\nu)}(t,x)\}$,

т.е. $\xi_\nu(\varepsilon)=\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \xi(t,x,\varepsilon),\varphi^{(\nu)}(t,x)\right\rangle dtdx.$

Применяя неравенство Гельдера при $p=q=2,$ из (11) получим

$$\left\|\xi(t,x,\varepsilon)\right\|\le\left\|u(t,x)\right\|, \tag{12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\le\varepsilon\left\|u(t,x)\right\|^2\le\varepsilon\, c\lambda_1^\alpha,\quad \varepsilon>0. \tag{13}$$

С другой стороны

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{\frac{-\alpha}{2(1+\alpha)}}}\cdot\lambda_\nu^{\frac{-\alpha}{2(1+\alpha)}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|\xi_\nu(t,x,\varepsilon)\right|^{\frac{1}{1+\alpha}}\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда, после применения к правой части обобщенного неравенства Гельдера при $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, $m=2(1+\alpha)$, $n=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\lambda_\nu\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}\left\|\xi(t,x,\varepsilon)\right\|_{L_2}^{\frac{2}{2(1+\alpha)}}\left\|u(t,x)\right\|_{L_2}^{\frac{2\alpha}{2(1+\alpha)}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|\le\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|^2\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{q}}\left\|\xi(t,x,\varepsilon)\right\|^{\frac{2}{q}}\left\|u(t,x)\right\|^{\frac{2}{p}}.$$

Далее, в силу $u(t,x)\in M_\alpha$, (12) и (13), из последнего неравенства имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|\le\left(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left\|u(t,x)\right\|_{L_2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|\le\left(\varepsilon c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}c^{\frac{1}{q}}\left(c\lambda_1^{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, подставляя $p=\frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$, $q=2(1+\alpha)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|\left|\xi_\nu(\varepsilon)\right|\le c\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{2(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}. \tag{14}$$

Учитывая (14), из (11) имеем

$$\left\|\vartheta(t,x,\varepsilon)-u(t,x)\right\|\le c^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{\frac{\alpha(2\alpha+1)}{4(1+\alpha)}}\varepsilon^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}},\quad 0<\alpha<\infty. \tag{15}$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-3) и $f(t,x)\in K(M_\alpha)$. Тогда справедлива оценка (15), где $\vartheta(t,x,\varepsilon)$ - решение системы (9).

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Искандаров С.