Жуаспаев Т.А.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

T.A. Zhuaspaev

MATHEMATICAL PROPERTIES OF THE ITERATIVE SCHEME FOR THE CALCULATION OF THERMALLY CONDUCTIVE MATERIALS

УДК-.621:641.325

Для определения коэффициента теплопроводности многослойного материала предлагается итерационный метод. Доказывается ограниченность итерационной последовательности.

To determine the coefficient of thermal conductivity of the laminate iterative method. Proves the boundedness of the iteration sequence.

1 Постановка задачи

В работе изучается одномерная задача распространения тепла в материале. Пусть в области Q=(0,H)x(0,T) происходит распространение тепла под действием температуры окружающей среды. Многочисленными экспериментами доказано, что распространение тепла в материале описается уравнением теплопроводности /1-5/

$$\gamma_0 c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right), \qquad (1)$$

где γ_0 -удельная масса материала $\frac{кг}{м^3}$; c – теплоемкость материала $\frac{ккал}{кг \cdot град}$; λ - коэффициент теплопроводности материала $\frac{ккал}{м \cdot час \cdot град}$.

На внешней границе материала справедлив закон сохранения энергии

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \alpha\left(\theta|_{z=H} - T_b\right) = 0, \qquad (2)$$

где α -коэффициент теплоотдачи материала в окружающую среду.

На внутренней стороне материала ставим граничное условие

$$\theta(0,t) = T_1 = const. \qquad (3)$$

Отметим, что ось oz направленно вертикально вверх. В начальный момент времени, при t=0 распространении температуры в материале задается, т.е.

$$\theta(z,0) = \theta_0(z), \quad 0 \le z \le H \qquad (4)$$

Рассмотрим случай, когда от z=0 до z=H материал состоит из трех слоев. При переходе от одного слоя к другому слою температура, и поток температуры остается непрерывными:

$$[\theta(z,t)]_{h_k} = 0, \qquad \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right]_{h_k} = 0, \quad k=1,2. \qquad (5)$$

где h_k -координата границы перехода от одного слоя к другому слою.

Для того, чтобы определить коэффициент теплопроводности материала дополнительно задается значение температуры на внешней границы материала

$$\theta(H,t) = \theta_g(t), \quad 0 \le t \le T. \qquad (6)$$

Требуется определить коэффициент теплопроводности многослойного материала. Методы решения обратных задач математической физики изучены в монографиях /6-10/, а методы решения прямой задачи распространения тепла и влаги в промерзаюьих грунтах изучены в работе /11-13/. Некоторые задачи коэффициентной обратной задачи теплопроводности изучены в работах /14-16/.

В работе /15/ из системы (1)-(6) получена сопряженная задача

$$\gamma_0 c \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0, \tag{7}$$

$$\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \alpha\psi\bigg|_{z=H} = -2\big(\theta(H,t) - \theta_g(t)\big), \quad \psi(z,T) = 0, \quad \psi(0,t) = 0, \tag{8}$$

$$[\psi]_{h_k} = 0, \qquad \left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{h_k} = 0. \tag{9}$$

и интегральное равенство:

$$2\int_0^T \delta\theta\big(\theta(H,t) - \theta_g(t)\big)dt = \int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z}\,dzdt. \tag{10}$$

2 Итерационный процесс

Задается начальное значение $\lambda_n(z)$. Следующее приближение $\lambda_{n+1}(z)$ определяется по формуле

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = -\beta_n \int_0^T \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\frac{\partial \psi^n}{\partial z}\,dt. \tag{11}$$

Лемма 1. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $T_b(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (1)-(5) имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\theta^2 dz + \int_0^t\int_0^H \lambda_n \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 dzd\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \theta^2(H,\tau)d\tau \le C_1,$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\theta_0^2(z)dz + \frac{\alpha}{2}\int_0^t T_b^2(\tau)d\tau.$$

Лемма 2. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $T_b(t), \mathrm{T_g}(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (1)-(5) имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\int_0^H \gamma_0 c\psi^2 dz + \int_t^T\int_0^H \lambda_n \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 dzd\tau + \frac{\alpha}{2}\int_t^T \psi^2(H,\tau)d\tau \le C_2$$

Здесь

$$C_2 = \frac{4}{\alpha}\int_0^T T_g^2(\tau)d\tau + \frac{8}{\alpha^2}C_1.$$

В каждом однородном слое многослойного грунта $\lambda_{n+1}(z)$=const. Поэтому интегрируя (11) по z от 0 до h_1, получим

$$\lambda_{n+1}(0) - \lambda_n(0) = -\beta_n(0)\frac{1}{h_1}\int_0^{h_1} dz \int_0^T \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\frac{\partial \psi^n}{\partial z}\,dt.$$

Эта формула справедлива для нижнего слоя грунта. Аналогично для второго и третьего слоя, получим формулу

$$\lambda_{n+1}(h_1)-\lambda_n(h_1)=-\beta_n(h_1)\frac{1}{h_2-h_1}\int_{h_1}^{h_2}dz\int_0^T\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\frac{\partial\psi^n}{\partial z}dt$$

$$\lambda_{n+1}(h_2)-\lambda_n(h_2)=-\beta_n(h_2)\frac{1}{H-h_2}\int_{h_2}^{H}dz\int_0^T\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\frac{\partial\psi^n}{\partial z}dt$$

Обозначим $z=0$ через h_0, т.е. $h_0=0$, $h_3=H$. Тогда все три формулы записываются в следующем виде

$$\lambda_{n+1}(h_k)-\lambda_n(h_k)=-\beta_n(h_k)\frac{1}{h_{k+1}-h_k}\int_{h_k}^{h_{k+1}}dz\int_0^T\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\frac{\partial\psi^n}{\partial z}dt \quad (12)$$

Суммируем (12) по n от 0 до произвольного n, т.е.

$$\lambda_{n+1}(h_k)-\lambda_0(h_k)=-\sum_n\beta_n(h_k)\frac{1}{h_{k+1}-h_k}\int_{h_k}^{h_{k+1}}dz\int_0^T\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\frac{\partial\psi^n}{\partial z}dt$$

Оценивается данное равенство с использованием неравенства Коши

$$\lfloor\lambda_{n+1}(h_k)-\lambda_0(h_k)\rfloor\le\sum_n\beta_n(h_k)\frac{1}{h_{k+1}-h_k}\int_0^T\left(\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right)^2dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right)^2dz\right)^{\frac{1}{2}}dt\frac{1}{\lambda_n(h_k)}$$

Еще раз применяем неравенство Коши по переменной t. Тогда

$$\lfloor\lambda_{n+1}(h_k)-\lambda_0(h_k)\rfloor\le$$

$$\le\sum_n\beta_n(h_k)\frac{1}{h_{k+1}-h_k}\left(\int_0^T\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right)^2dzdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right)^2dzdt\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\lambda_n(h_k)} \quad (13)$$

Из леммы 1 следует $\int_0^T\int_0^H\lambda_n\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2dzdt\le C_1$ отсюда в частности

$$\int_0^T\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right)^2dzdt\le C_1$$

Аналогично из леммы 2 следует неравенство $\int_0^T\int_{h_k}^{h_{k+1}}\lambda_n\left(\frac{\partial\psi^n}{\partial z}\right)^2dzdt\le C_2$.

С учетом этих неравенств соотношение (13) приводится к следующему виду $C_3 = \sqrt{C_1 C_2}$

$$\lfloor \lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k) \rfloor \leq C_3 \sum_n \beta_n(h_k) \frac{1}{h_{k+1} - h_k} \frac{1}{\lambda_n(h_k)}.$$

Пусть $\beta_n(h_k) \frac{1}{h_{k+1} - h_k} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\beta}{n^{\alpha_0}}$, $\alpha_0 > 1$. Тогда

$$\lfloor \lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k) \rfloor \leq C_3 \beta \sum_n \frac{1}{n^{\alpha_0}}.$$

Но ряд $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha_0}}$ сходится, поэтому $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha_0}} \leq C_4$, тогда

$$\lfloor \lambda_{n+1}(h_k) - \lambda_0(h_k) \rfloor \leq C_5 \beta, \quad C_5 = C_4 C_3$$

Отсюда

$$\lambda_0(h_k) - C_5 \beta \leq \lambda_{n+1}(h_k) \leq \lambda_0(h_k) + C_5 \beta, \quad k=0,1,2.$$

Малую величину β подбираем так, чтобы имело место неравенство

$$\lambda_0(h_k) - C_5 \beta \geq C_6 > 0.$$

Тогда $C_5 \beta \leq \lambda_0(h_k)$

$$0 < C_6 \leq \lambda_{n+1}(h_k) \leq C_7 < \infty.$$

Доказана

Теорема. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H), T_b(t), \theta_1(t) \in L_2(0,T)$, то существует достаточно малое число β такое, что из (11) следует неравенство

$$0 < C_6 \leq \lambda_{n+1}(h_k) \leq C_7 < \infty.$$

Литература:

1. Kersten M.S. The thermal conductivity of soils. Proceedings. 2-nd Intern, confer, on soil mechanics a. foundation engineering, v. 3. Rotterdam, 1948.
2. Kersten M.S. Thermal properties of soils. Frost Action in soils. A Symposium. High way Research Board Special Report 2, Minneapolis, 1949.
3. Чудновский А.Ф. Теплообмен в дисперсных средах. - М. Гостехиздат, 1954, 444 с.
4. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). -М.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI стр. 153-192
5. Чудновский А.Ф. Физика теплообмена в почве. М., Гостехиздат, 1948.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Баканов Г.Б.