Шеров К.Т., Ходжибергенов Д.Г.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОБРАБАТЫВАЕМОГО МАТЕРИАЛА ПРИ РОТАЦИОННОЙ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ

K.T. Sherov, D.T. Khodzhibergenov

THERMAL CONDUCTIVITY MATERIAL ROTARY MACHINING PROCESSING OF METALS

УДК: 621.91.01

В данной статье рассматриваются задачи распространения теплового потока в обрабатываемом теле, по которым можно получить значение температур в любой точке цилиндра в любой момент времени.

In given clause the analytical research allowing determining of distribution of heat at rotational processing is resulted. By the submitted equations, it is possible to receive importance of temperatures in any point of the cylinder at any moment of time.

Отличие многолезвийного ротационного резания от других методов механической обработки потребовало применения аналитических исследований, позволяющих определить распространения тепла при обработке.

Рассмотрим однородный цилиндр длины *L*. Так как инструмент, стружка (трехгранная), а также обрабатываемый деталь имеют форму ближе цилиндру. Опытным путем установлено, что скорость распространения тепла, т. е. количество тепла, протекающего через сечение с абсциссой x за единицу времени, определяется формулой

$$g = -k\frac{\partial u}{\partial x}S, \qquad (1)$$

где S - площадь сечения рассматриваемого цилиндра, k - коэффициент теплопроводности. Скорость распространения тепла, или скорость теплового потока, определяется так:

$$g = \lim\frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (2)$$

Рассмотрим элемент цилиндра, заключенный между сечениями с абсциссами x_1 и x_2 ($x_1 - x_1 = \Delta x$). Количество тепла, прошедшего через сечение с абсциссой x_1 за время, Δt будет равно

$$\Delta Q_1 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S = \Delta t \qquad (3)$$

То же самое для сечения с абсциссой x_2:

$$\Delta Q_2 = -k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S = \Delta t \qquad (4)$$

Приток тепла ΔQ_1 - ΔQ_2 в элемент цилиндра за время Δt будет равняться:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = [-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} S = \Delta t] - [-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2} S = \Delta t] \approx$$

$$\approx k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x S \Delta t \qquad (5)$$

(мы приняли теорему Лагранжа к разности $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}$). Этот приток тепла за время Δt затратился на повышение температуры элемента цилиндра на величину Δu:

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho\Delta x S\Delta u \qquad (6)$$

или

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho\Delta x S\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t, \qquad (7)$$

где c – теплоемкость вещества цилиндра, ρ- плотность вещества цилиндра ($\rho\Delta x S$ – масса элемента цилиндра).

Приравнивая выражения (5) и (7) одного и того же количества тепла ΔQ_1 - ΔQ_2, получим:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta xS\Delta t = c\rho\Delta xS\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Обозначая $\frac{k}{c\rho}=a^2$, окончательно получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (8)$$

Это и есть уравнения распространения тепла или уравнение теплопроводности в однородном цилиндре.

Чтобы решение уравнения (8) было вполне определенно, функция $u\,(x,\,t)$ должно удовлетворять краевым условиям, соответствующим физическим условиям задачи. Краевые условия для решения уравнения (8) могут быть различные. Условия, которые соответствуют так называемой первой краевой задаче для $0 \le t \le T$, следующие:

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x), \qquad (9)$$
$$u\,(x,\,t) = \psi_1(t), \qquad (10)$$
$$u\,(l,\,t) = \psi_2(t). \qquad (11)$$

Физически условия (6) соответствует тому, что при $t = 0$ в различных сечениях стержня температура, равная $\varphi\,(x)$. Условия (10) и (11) соответствуют тому, что на концах цилиндра при $x = 0$ и при $x = l$ поддерживается температура, равная $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ соответственно.

Доказывается, что уравнения (8) имеет единственное решение в области $0 \le t \le l$, $0 \le t \le T$ удовлетворяющее условиям (9), (10), (11.).

К задаче распространения тепла в ограниченном цилиндре сводятся физические задачи в том случае, когда цилиндр столь длинный, что температура во внутренних точках цилиндра в рассматриваемые моменты времени мало зависит от условий на концах цилиндра. Если цилиндр совпадает с осью O_x, то математически задача формулируется следующим образом. Найти решение уравнения (8) в области $0 < x < \infty$, $t > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,\,0) = \varphi\,(x). \qquad (12)$$

Если функция $\varphi\,(x)$ ограничена на бесконечном интервале $(0, \infty)$, тогда решением уравнения (8), удовлетворяющим условия (12) можно принять интеграла Пуассона о распространении тепла:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha. \qquad (13)$$

Установим физический смысл формулы (13). Рассмотрим функцию

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}0 \Rightarrow при \longrightarrow 0<x<x_0,\\ \varphi(x) \Rightarrow при \longrightarrow x_0 \le x \le x_0+\Delta x,\\ 0 \Rightarrow при \longrightarrow x_0+\Delta x < x < \infty.\end{cases} \qquad (14)$$

Тогда функция

$$u^*(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \varphi^*(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha \qquad (15)$$

есть решения (8), принимающее при $t = 0$ значение $\varphi^*(x)$.

Принимая во внимание (13), можем написать:

$$u^*(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varphi^*(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}}d\alpha$$

Применив теорему о среднем к последнему интегралу, получим:

$$u^*(x,t)=\frac{\varphi(\xi)\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \qquad x_0<\xi<x_0+\Delta x. \qquad (16)$$

Формула (16) дает значение температуры в точке цилиндра в любой момент времени, если при $t = 0$ всюду в цилиндре температура $u^* = 0$, кроме отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$, где она равна $\varphi(x)$. Сумма температур вида (16) и дает решение (13). Заметим, что если ρ – линейная плотность материала цилиндра, c – теплоемкость материала, то количество тепла в элементе $[x_0, x_0 + \Delta x]$ при $t = 0$ будет

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\Delta x \rho c. \tag{17}$$

Рассмотрим далее функцию

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}. \tag{18}$$

Сравнивая ее с правой частью формулы (16) с учетом (17), можно получить значение температур в любой точке цилиндра в любой момент времени t, если при $t = 0$ в сечении ζ был мгновенный источник тепла с количеством $Q = c\rho$.

Литература:

1. Вильнер Г. С. Токарная обработка деталей. ВИНИТИ №5 Москва 2001 год. Технология машиностроения, с.4.
2. Г.С.Вильнер. Описание процесса резания на основе различных реологических моделей. Сборник научных трудов. С-Петербург. Институт Машиностроения. 1999. №1. с 75-85.
3. Voshida Kanou. Increases of accuracy at processing. Hakkoido Inst. Technol. 2000. №28, с.85-92. Англ.
4. Годунов С. К.. Рябенький В. С. Разностные схемы. М. «Наука», 1977.
5. Грановский Г.И. Резание металлов. М. «Высшая школа», 1985.
6. Рахтмайер Р.Д., Мортон К., Разностные методы решение краевых задач, М., «Мир», 1982.

Рецензент: д.т.н., профессор Печерский В.Н.