Мальчик Ю.Н.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ТОЧНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Yu.N. Malchik

THE DESIGN OF ACCURATE TRANSFER FUNCTION OF TIME VARING LINEAR SYSTEM

УДК: 62-50

В данной статье рассматриваются случаи существования в конечном виде точных передаточных функций нестационарных линейных систем, из которых состоит сложная нестационарная линейная система.

This paper studies cases when accurate transfer function exist in time varying linear systems creating complex connection.

1. Введение

При исследовании нестационарных линейных систем (НЛС), уравнения вынужденных колебаний (УВК) которых имеют вид

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \dots + b_n(t)]x(t) = y(t),\ p = \frac{d}{dt},\ t \in (-\infty, T) \qquad (1.1)$$

где $T\leq\infty$; $y(t)$, $x(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; $b_1(t),\dots, b_n(t)$ - вещественные непрерывные функции аргумента t, часто возникает задача о вычислении передаточной функции (ПФ) системы, либо задача вычисления ПФ звеньев, из которых состоит система. Рассмотрим два основных способа решения этой задачи.

Передаточная функция (ПФ) НЛС, процессы в которой описываются уравнением вида (1.1), может быть найдена по формуле Ш.Блана [1]

$$G(s,t) = \exp(-s,t)\int_{-\infty}^{t} g(t,u)\exp(su)\,du. \qquad (1.2)$$

Здесь: s - комплексный аргумент; $g(t,u)$ - импульсная переходная функция НЛС (реакция системы на импульс *5(1-u))*.

Передаточная функция НЛС с УВК (1.1) может быть найдена как частное решение уравнение Л.Заде [2]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\frac{d^kD(s,t)}{ds}\cdot\frac{d^kG(s,t)}{dt} = 1,$$

где $D(s,t) = s^n + b_1(t)s^{n-1} + \dots + b_n(t)$. (1.3)

Точные ПФ систем, либо звеньев этих систем могут быть вычислены в конечном виде (с помощью конечного числа арифметических операций над элементарными функциями) лишь в исключительных случаях. В данной статье рассматривается задача выявления таких исключительных случаев.

2. Точные передаточные функции звеньев первого порядка

Звено первого порядка в дальнейшем будем считать нестационарной линейной системой первого порядка. Нашей задачей является задача выявления исключительных случаев для НЛС, уравнение вынужденных колебаний (УВК) которой имеет вид

$$[p + b(1)]x(1) = y(t),\ \infty<t<T, \qquad (2.1)$$

Передаточную функцию этой системы будем искать как решение уравнения Л.Заде (1.3)

$$\frac{d}{dt}G(s,t) + D(s,t)\cdot G(s,t) = 1. \qquad (2.2)$$

Здесь $D(s,t) = s + b(t)$.

Задачу будем решать в два этапа. На первом этапе находим импульсную переходную функцию g(t,u) для УВК (2.1) следующим образом. Для уравнения свободных колебаний (УСК)

$$\frac{d}{dt}G(s,t) + D(s,t)\cdot G(s,t) = 0. \qquad (2.3)$$

$\partial\{$

обобщенное характеристическое уравнение (ОХУ) имеет вид [3]

$$\zeta(s,t) + D(s,t) = 0$$

$$\zeta(s,t) = -D(s,t)$$

Отсюда

Тогда ИПФ может быть найдена по формуле [3]

$$g(t,u) = exp\left(-\int_u^t D(s,v)dv\right). \quad (2.4)$$

Здесь: g(t,u) = g(s,t,u) - ИПФ содержит комплексный параметр s.

На втором этапе ищем ПФ по формуле [4]

$$G(s,t) = \int_0^t g(t,u) \quad (2.5)$$

Здесь: $G(s,t) = G_{св}(s,t)+G_{вын}(s,t)$. Свободная составляющая $G_{св}(s,t)$, полученная подстановкой $u = O$ при вычислении нижнего предела интеграла (2.5), должна быть отброшена. Тот же результат может быть получен по формуле

$$G(s,t) = \int_{-\infty}^t g(t,u)\,du$$

Совершенно очевидно, что для получения ПФ в конечном виде, интегралы (2.4) и (2.5) должны вычисляться тоже в конечном виде. Это возможно лишь в исключительных случаях. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть

$$b(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad f'(t) = \frac{df}{dt}. \quad (26)$$

Тогда

$$D(s,t) = s + \frac{f'(t)}{f(t)}; \quad \varsigma(s,t) = -\left[s + \frac{f'(t)}{f(t)}\right];$$

$$g(t,u) = exp\left(-\int_u^t\left(s + \frac{f'(t)}{f(t)}\right)dv\right) \quad (2.7)$$

Интеграл (2.7) - табличный, следовательно

$$g(t,u) = \frac{\exp(su)}{\exp(st)} \cdot \frac{f(u)}{f(t)}. \quad (2.8)$$

Теперь ищем ПФ по формуле

$$G(s,t) = \frac{\exp(-st)}{f(t)} \int_{-\infty}^t f(u) \cdot \exp(su)\,du \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что $f(u)$ должна быть такой, чтобы интеграл был табличным и вычислялся в конечном виде.

Пример 1. Найти G(s,t), если

$$f(u) = u^k + b_1u^{k-1} + \ldots + b_{k-1}u + b_k.$$

Решение. С учетом [5]

$$\int u^k \exp(su)\,du = \exp(su)\left[\frac{u^k}{s} - \frac{ku^{k-1}}{s^2} + \cdots (-1)^{k-1}\frac{k!\,u}{s^k} + (-1)^k\frac{k!}{s^{k+1}}\right].$$

(2.10)

из (2.9) получим

$$G(s,t) = \frac{1}{f(t)}\left[\frac{f(t)}{s} - \frac{f'(t)}{s^2} + \frac{f''(t)}{s^3} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{s^k} + (-1)^k\frac{f^{(k)}}{s^{k+1}}\right]. \quad (2.11)$$

Пример 2. Найти $G(s,t)$, если $f(u) = cos(u)$.

Решение. С учетом [5]

$$\int \cos(u)\,du = \frac{\exp(su)}{s^2+1}[s\cos(u) + \sin(u)]$$

по формуле (2.9) получим

$$G(s,t) = \frac{s + tg(t)}{s^2+1}. \quad (2.12)$$

2. Пусть теперь

$$b(t) = \frac{k}{t+a}, \qquad k=1,2,\ldots, a>0. \quad (2.13)$$

В этом случае

$$g(t,u) = \frac{\exp(su)}{\exp(st)} \cdot \frac{(u+a)^k}{(t+a)^k}. \quad (2.14)$$

Отсюда с учетом (2.10) получим

$$G(s,t)=\frac{1}{(t+a)^k}\left[\frac{(t+a)^k}{s}-\frac{k(t+a)^{k-1}}{s^2}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{k!\cdot(t+a)}{s^k}+(-1)^k\frac{k!}{s^{k+1}}\right] \qquad (2.15)$$

Таким образом, точные передаточные функции НЛС первого порядка могут быть получены, только тогда, когда коэффициент $b(t)$ при неизвестной $x(1)$ есть производная от логарифмической функции $ln\ f(t)$, либо является рациональной дробью (2.13).

3. Точные передаточные функции звеньев второго порядка

Звено второго порядка в дальнейшем будем считать нестационарной линейной системой второго порядка. Нашей задачей является задача выявления исключительных случаев для НЛС, уравнение вынужденных колебаний (УВК) которой имеет вид

$$[p^2+b_1(t)p+b_2(t)]x(t)=y(t),\ \infty<t<T. \qquad (3.1.)$$

Обобщенное характеристическое уравнение (ОХУ) имеет вид [3]

$$\zeta^2+b_1(t)\cdot\zeta+b_2(t)+\zeta'=0 \qquad (3.2.)$$

Пусть функции $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ являются корнями этого уравнения. Тогда ИПФ системы имеет вид [3]

$$g(t,u):=\frac{exp\int_u^t\zeta_2(v)dv-exp\int_u^t\zeta_1(v)dv}{\zeta_2(u)-\zeta_1(u)} \qquad (3\ 3)$$

Из (3.3) очевидно, что существование ИПФ в конечном виде зависит от вида корней $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$. Пусть ИПФ существует в конечном виде.

Тогда точную передаточную функцию системы можно найти по формуле Ш.Блана (1.2). Нашей задачей является выяснение случаев, когда ПФС второго порядка может быть вычислена в конечном виде.

В работе [6] показано, если коэффициенты ОХУ (3.2) равны соответственно:

$$b_1=2\cdot\frac{f'}{f},\quad b_2=\left(\frac{f'}{f}\right)^2+\left(\frac{f'}{f}\right)'-k^2$$

то корни ОХУ (3.2.) равны (3.4.)

$$\zeta_1=-\frac{f'}{f}+k,\quad \zeta_2=-\frac{f'}{f}-k \qquad (3.5.)$$

Из формул (3.5) совершенно очевидно, что импульсная переходная функция (3.3) легко может быть вычислена, поскольку корни ζ_1 и ζ_2 содержат только константы и логарифмические производные. Действительно

$$g(t,u)=\frac{1}{2k}\cdot\frac{f(u)}{f(t)}[\exp(-kt)\cdot\exp(ku)-\exp(-kt)\cdot\exp(-ku)]$$

Теперь по формуле (1.2) ПФС можно представить в виде

$$G(s,t)=\frac{\exp(-st)}{2k\cdot f(t)}\left[\exp(-kt)\int_{-\infty}^{t}f(u)\cdot\exp\big((s+k)u\big)\,du-\exp(kt)\int_{-\infty}^{t}f(u)\cdot\exp\big((s-k)u\big)\,du\right]$$

Здесь от вида функции $f(u)$ зависит существование ПФС $G(s,t)$ в конечном виде.

Пример 3. Найти ПФС, уравнение которой имеет вид (3.1), если

$$b_1=2\cdot\frac{1}{t+a},\quad b_2=k^2$$

Решение. Из (3.4) и (3.5) следует, что в этом случае корни ОХУ (3.2) равны:

$$\zeta_1=-\frac{1}{t+a}+k,\ \zeta_2=-\frac{1}{t+a}-k \qquad (3.6)$$

С учетом (3.3), (3.6) по формуле (1.2) получим

$$G(s,t)=\frac{s^2-\frac{2}{t+1}\cdot s-k^2}{(s-k)^2(s+k)^2} \qquad (3.7)$$

Пусть коэффициенты b_1, b_2 уравнения (3.1) равны соответственно:

$$b_1=2k\frac{f'}{f};\quad b_2=(2k-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2+\left(\frac{f'}{f}\right)' \qquad (3.8)$$

Здесь $к$= 2,3 ... Известен один корень ζ_1 обобщенного характеристического уравнения (3.2) $\zeta_1=f'/f$. Второй корень может быть найден путем сведения ОХУ (3.2) к линейному уравнению

$$u'-(2\zeta_1+b_1)u=1 \qquad (3.9)$$

известной подстановки ζ_1+1/u .

Решая уравнение (3.9) получим

$$\varsigma_2 = \varsigma_1 + \frac{exp\lfloor -\int (2\varsigma_1 + b_1)\rfloor}{\int exp\lfloor -\int (2\varsigma_1 + b_1)dt\rfloor dt} \quad (3.10)$$

Очевидно, что ζ_1 *(t)* и $b_1(t)$ должны быть такими, чтобы интегралы в (3.10) вычислялись в конечном виде.

Пример 4. Найдем ПФС (3.1), если коэффициенты b_1, b_2 уравнения (3.1) равны соответственно:

$$b_1 = 4 \cdot \frac{1}{t+a}, \quad b_2 = 2 \cdot \frac{1}{t+a}$$

Решение. Первый корень ОХУ (3.2) равен $\zeta_1 = -1 / (t + a)$. Тогда решив уравнение (3.10) получим $\zeta_2 = -2/(t+a)$. Окончательно с учетом (3.3) по формуле (1.2) получим

$$G(s,t) = \frac{s^2 - \frac{4}{t+a} \cdot s + \frac{6^2}{(t+a)^2}}{s^4} \quad (3.11)$$

Итак, точные ПФ НЛС второго порядка могут быть получены только тогда, когда корни ζ_1 и ζ_2 ОХУ (3.2) содержат только константы и логарифмические производные.

Рассмотренный метод исследования НЛС можно распространить и на системы высших порядков.

4. Заключение

Класс точных передаточных функций нестационарных линейных систем, вычисленных с помощью конечного числа операций над элементарными математическими функциями, весьма ограничен.

В случае НЛС первого порядка, импульсная переходная и передаточная функции существуют в конечном виде, если коэффициент *b(t)* при неизвестной *x(t)* УВК системы является логарифмической производной *f'/f* либо - дробно-рациональным выражением.

В случае НЛС второго порядка, импульсная переходная и передаточная функции существуют в конечном виде, если корни $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ соответствующего ОХУ уравнения свободных колебаний системы является логарифмической производной *f'/f*, либо - дробно-рациональным выражением.

Литература:

1. Blank Ch. Sur les equation differentieles lineaires a coeffietients lente-ment variable, - Bull. Technique de la Suisse romande, 1948. у.74. № 15, р. 182 - 189.
2. Zaden L.A. Frequency analysis of variable networks. – Pros. IRE, 1950, №3, р. 291-299.
3. Михайлов Ф.А.. Анализ и синтез нестационарных линейных систем. М.: Машиностроение, 1977. -296 с.
4. Мальчик Ю.Н. Об одном способе отыскания решения уравнения Л.Заде. //Наука и новые технологии №2. Бишкек. 2011. с 24-29.
5. Двайт Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М: Наука, 1977.-228 с.
6. Валяев А.Н., Мальчик Ю.Н. О способах отыскания приближенных формул решений уравнений свободных колебаний второго порядка. //Де-понированная рукопись № 609 от 26.07.1984. Алма-Ата. КазНИИНТИ. 1990. - 19 с.

Рецензент: д.т.н. Асанов А.