***МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ. СЕЙСМОЛОГИЯ***

*Каримов С.К., Азимбаев М.А.*

# РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

*S.K. Karimov, M.A. Azimbaev*

# UNIFORM APPROXIMATION OF SOLUTIONS SINGULARLY PERTURBED SYSTEM DIFFERENTIAL EQUATIONS SPECIAL CRITICAL CASE

*УДК:517.928*

*В данной работе построена равномерные приближения решения сингулярно-возмущенной системы дифференциальных уравнений с любой степени точностью в особом критическом случае.*

*In this paper uniform approximations are constructed for solving singularly-perturbed system of differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.*

В работе [1] все построенные приближения являются равномерными на рассматриваемом отрезке с любой степени точностью по малому параметру. В данной работе все приближения построена с тем же способом как в работе [1], но оценки этих приближений более совершенной.

Рассмотрим линейной системы вида

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x(t,\varepsilon) + \varepsilon[f(t) + B(t)x(t,\varepsilon)], \tag{1}$$

$$x(t_0\varepsilon) = x^0(\varepsilon), \|x(\varepsilon)\| = O(\varepsilon), \tag{2}$$

Где $D(t) = diag\,\{(t+i)^2, (t-i)^2\}, f(t) = colon(f_1(t), f_2(t)); B(t) = (b_{kj}(t))_1^2;$

$\varepsilon > 0$ – малый параметр, $t_0 = 0, T_0 = \sqrt{3};\ 0 \le t \le \sqrt{3}.$

Сначала задачу (1), (2) заменим на следующую эквивалентную задачу:

$$x(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x(\tau,\varepsilon) + f(\tau)]d\tau,$$

где $E(t,\tau,\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} D(s)ds\right).$

Как в работе [1] рекуррентно определим следующие функции:

$$x^{(1)}(t,\varepsilon) = E(t,t_0,\varepsilon)x^0(\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)f(\tau)d\tau,$$

$$x^{(k+1)}(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} E(t,\tau,\varepsilon)[B(\tau)x^{(k)}(\tau,\varepsilon)]d\tau, k = 1,2,\dots.$$

Тогда $x(t,\varepsilon) = x^1(t,\varepsilon) + x^{(2)}(t,\varepsilon) + \dots + x^{(k)}(t,\varepsilon) + \dots, при\ t_0 \le t \le T_0, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0.$ (3)

Пусть $t = t_1 + it_2, \tau = \tau_1 + i\tau_2;\ t + i = \tilde{r}e^{i\tilde{\varphi}}, \tau + i = re^{i\varphi}, t - i = \tilde{r}'e^{i\tilde{\varphi}}, \tau - i = r'e^{i\varphi'};$

где $t_1 t_2;\ \tau_1 \tau_2;\ \tilde{r}, \tilde{r}', \tilde{\phi}, \tilde{\phi}' ; r, r'$ – действительные переменные;

$$u_1(t_1 t_2) = u_1(\tilde{r}, \tilde{\phi}) = \frac{1}{3} Re(t+i)^3 = \frac{1}{3} \tilde{r}^3 cos3\tilde{\phi};$$

$$u_2(t_1 t_2) = u_2(\tilde{r}', \tilde{\phi}') = \frac{1}{3} Re(t-i)^3 = \frac{1}{3} (\tilde{r}')^3 cos3\tilde{\phi}';$$

$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \ln \varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \le e^{-1}$ *и* $\delta(0) = 0;\ \delta_0$ – постоянное причем $0 < \delta_0 \ll 1;$

$\tilde{\varphi}_{01} \tilde{\varphi}'_{01}$ два последовательные решения уравнения $\cos(n+1)\tilde{\phi} = 0$, *причем* $\cos(n+1)\tilde{\phi} < 0$ *при* $\tilde{\varphi} \epsilon (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01})$. Здесь и в дальнейшем *n*=2(*n*+1=3). Тогда имеется единственное решение $\tilde{\varphi}_0 \epsilon (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}'_{01})$ уравнения cos(n+1) $\tilde{\varphi}_0$=1. Далее возьмем две решение $\tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}'_1$ уравнения cos(n+1)φ=$\delta_0$ так, чтобы $\phi_1 \to \tilde{\phi}_{01}, \phi_1' \to \tilde{\phi}'_{01}$ при $\delta_0 \to 0$. Теперь возьмем $\Phi_0$, $\Phi'_0$ такие что cos(n+1) $\Phi_0$=cos(n+1)$\Phi'_0$=$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\phi_0 \epsilon (\tilde{\varphi}_{01}, \tilde{\varphi}_0), \phi_0' \epsilon (\tilde{\varphi}_0, \phi_{01}'). H_0 = \{(t_1, t_2): u_k(t_1, t_2) \le 0, k = 1,2\} = [ABC] - \frac{\text{причем}}{\text{замкнутый}} \text{ треугольник с вершинами в точках } A(0,-1), B(0,1), C(0,\sqrt{3});$$

$$H_1 = \Big\{(\tilde{r}, \tilde{\phi}): u_k(\tilde{r}, \tilde{\phi}) \le -\delta_0; \text{ или } u_k(\tilde{r}, \tilde{\phi}) \le 0 \text{ и } \tilde{r} \ge \delta_0, \tilde{\phi} \in [\tilde{\phi}_{01}, \phi_0]; \text{ или } u_k(\tilde{r}, \tilde{\phi}) \le \frac{2}{3}\delta(\varepsilon) \text{ и } \tilde{r} \ge \delta_0, \tilde{\phi} \in [\phi_0', \phi_{01}'], k = 1,2\Big\}.$$

Пусть $[t_0, T_0] \subset S_r$ – открытый круг радиуса $r \ge \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$ с центром в точке $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right); t \in S_r;\ \phi(S_r)$ - пространства аналитических функци в $S_r$; Решение x(t,ε)=colon($x_1$(t,ε), $x_2$(t,ε)) будем искать в классе $x_k$(t,ε) ∈Φ($S_r$) (k=1,2) по t.

**Будем требовать выполнения следующих условий:**

Пусть I. $f_k(t) \in \phi(S_r);\ b_{kj}(t) \in \phi(S_r)(k, j = 1,2)$.

Докажем равномерности разложение решения (3) в $H_0$ при ε→0.

Справедлива оценки: $\left|x_1^{(1)}(t,\varepsilon)\right| = 0\left(\omega(\tilde{r}, \tilde{\phi})\right), \left|x_2^{(1)}(t,\varepsilon)\right| = O\left(\tilde{\omega}(\tilde{r}, \tilde{\phi})\right)$, где $\omega(\tilde{r}, \tilde{\phi}) = \varepsilon$ при $(\tilde{r}, \tilde{\phi}) \epsilon H_1;\ \omega(\tilde{r}, \tilde{\phi}) = \sqrt[3]{\varepsilon}$ при $(\tilde{r}, \tilde{\phi}) \epsilon (H_0 \backslash H_1);\ \tilde{\omega}(\tilde{r}, \tilde{\phi})$ – *симметричная функция к* $\omega(\tilde{r}, \tilde{\phi})$ относительно действительной оси.

Докательства оценки (4) совершенно аналогично, как оценки решения простейшей задачи задачи работы [3].

Пуст $\{C_1\}$ $(u_1(t_1, t_2) = C_1)$ соединяет точки ($t_{01}$0), ($T_1$, 0), а $\{C_2\}$ ($u_1$($t_1$ $t_2$) = $C_2$) точки ($t_{02}$, 0), ($T_2$, 0) ($t_0 < t_{01} < t_{02} < a_0$), $a_0 < T_2 < T_1 < T_0$, где $a_0 = 1$.

Рассмотрим полосу P, ограниченную линиями уровней $\{C_1\}$ *и* $\{C_2\}$ отрезками действительной оси $[t_{01}, t_{02}], [T_2, T_1]$.

На полосе $P$ рассмотрим уравнения

$$u_1(t_1,t_2)=at_1+b, \text{ где } a=\frac{C_2-C_1}{T_2-t_{01}},\ b=\frac{C_1T_2-C_2t_{01}}{T_2-t_{01}}. \quad (5)$$

**Лемма.** Если линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C\ \ (C_2\le C\le C_1)$ полностью покрывают полоса $P$ и произвольная точка $(t_1,t_2)$ полоса $P$ принадлежит единственной линии уровня $\{C\}, Jm\lambda_1(t)\ne 0,$ то уравнения (5) в полосе $P$ определяет однозначную непрерывно дифференцируемую функцию $t_2=\varphi(t_1)$ с областью существования $(t_{01}\le t_1\le T_2)$ и кривая $(K_0)$, определяемая этой функцией, соединяет точки $(t_{01},0),(T_2,0),$ причем $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ убывает на $[t_{01},T_2]$.

Доказательство. Пусть $\psi(t_1)=at_1+b$. Так как $\psi(t_1)$ монотонно убывает любом отрезке и $\psi(t_{01})=C_1, \psi(T_2)=C_2<C_1$, то при $t_{01}\le t_1\le T_2$ справедливо $C_1\ge\psi(t_1)\ge C_2$.

Рассмотрим линии уровня $u_1(t_1,t_2)=C\ \ (C_2\le C\le C_1)$. Линии уровня $\{C\}\subset P$.

По заданному значению $C$ однозначно определяется значение $t_1=t_1^*$ из равенства

$$\psi(t_1^*)=C\left(t_1^*=\frac{C-b}{a}\right),\ \text{причем } t_1^*\in[t_{01},T_2].$$

Теперь через точку $(t_1^*,0)$ проведем прямую параллельную на оси ординат. Это прямая с линией уровни $\{C\}$ пересекается в единственной точке $(t_1^*,t_2^*)$. Таким образом, каждому значению $t_1=t_1^*\in[t_{01},T_2]$ соответствует единственная точка $(t_1^*,t_2^*)\in\{C\}$ такой, что

$$u_1(t_1^*,t_2^*)=C=\psi(t_1^*)=at_1^*+b,$$

причем $u_1(t_{01},0)=C_1=\psi(t_{01})=C_1;\ \ u_1(T_2,0)=C_2=\psi(T_2)=C_2$.

Существование кривой $(K_0)$ соединяющую точки $(t_{01},0),(T_2,0),$ целиком принадлежащей на полосе $P$ и имеющей уравнение (5) доказано. Так как $(u_1(t_1,t_2))'_{t_2}=-Jm\lambda_1(t_1,t_2)\ne 0,$ то из (5) определяется однозначная непрерывно-дифференцируемая функция $t_2=\varphi(t_1),\left(\varphi(t_1)=\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_1(t_1,t_2)-a}{Jm\lambda_1(t_1,t_2)}\right);$

$u_1(t_1,\varphi(t_1))\equiv at_1+b,$ т.е., $u_1(t_1,\varphi(t_1))$ - убывает на $[t_{01},T_2]$. Лемма доказана.

Лемма своеобразным методом доказано в работе [2]. Здесь мы привели другое доказательство.

Заметим что из равенства

$$u_1(t_1^*,0)=\delta(\varepsilon)\ \ (u_1(t_1^*,0)=-\varepsilon) \quad (6)$$

в некоторой окрестности точки $(t_1^*=t_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=t_0+\gamma(\varepsilon)\ (t_1^*=t_0+\gamma_1(\varepsilon)),$ причем, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\gamma(\varepsilon)=0\ \left(\lim\limits_{\varepsilon\to0}\gamma_1(\varepsilon)=0\right),$ где $\gamma(\varepsilon)\ge 0\ \ (\gamma_1(\varepsilon)\ge 0)$ - непрерывная функция от $\varepsilon$ при $0\le\varepsilon\le\varepsilon_0$. Аналогично из (6) в некоторой окрестности точки $(t_1^*=T_0,\varepsilon=0)$ однозначно определяется $t_1^*=T_0-\tilde{\gamma}(\varepsilon)$

$(t_1^* = T_0 - \widetilde{\gamma}_1(\varepsilon))$, где $\widetilde{\gamma}(\varepsilon) \geq 0$ $(\widetilde{\gamma}_1(\varepsilon) \geq 0)$ - непрерывная функция от $\varepsilon$ при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, причем,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\gamma}(\varepsilon) = 0 \ \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\gamma}_1(\varepsilon) = 0\right).$$

Для оценки последовательных приближений $\left\{x_k^{(n)}(t,\varepsilon)\right\}$ $(n = 2,...;\ k = 1,2)$ будем использовать основную лемму.

Пусть линия уровня $(C_1)$ соединяет точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \widetilde{\gamma}_1(\varepsilon), 0)$, линия уровня $(C_2)$ соединяет точки $(t_0 + \gamma(\varepsilon), 0)$, $(T_0 - \widetilde{\gamma}(\varepsilon), 0)$. Возьмем кривую $(K_0^*)$ симметричную к $(K_0)$. Область ограниченный $(K_0)$ и $(K_0^*)$ обозначим через $K_\varepsilon \subset H_0$. $\widetilde{K}_\varepsilon = \Delta \cup K_\varepsilon$, где $\Delta = \{(t_1,t_2): t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma_1(\varepsilon);\ t_2 = 0\}$.

Теперь будем оценить $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n = 2,3,...)$ для $\forall t \in \Delta \cup K_\varepsilon$. Для всех приближений $x_1^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n = 2,3,...)$ путь интегрирования $l$ будет неизменным. Здесь также путь интегрирования $l$ определяется в зависимости от того, какому множеству принадлежит точка $(t_1,t_2)$. Если $(t_1,t_2) \in \Delta$ $(t = t_1, t_2 = 0)$, то $l$ состоит из одного отрезка прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_1,0)$ $(t_0 \leq t_1 \leq t_0 + \gamma_1(\varepsilon))$. В этом случае $\operatorname{Re}\lambda_k(t) \leq -\alpha,\ \alpha > 0 - const.$

Пусть $(t_1,t_2) \in K_\varepsilon$. Тогда $l = \sum_{k=1}^{3} l_k$, где $l_1$ - отрезок прямой, соединяющий точки $(t_0,0)$ с точкой $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon),0)$; $l_2$ - отрезок кривой $(K_0)$, соединяющий точки $(t_0 + \gamma_1(\varepsilon),0)$ с точкой $\left(t_1, t_2^* = \widetilde{\varphi}(t_1,\varepsilon)\right)$; $l_3$ - отрезок прямой, соединяющий точки $(t_1,t_2^*)$ с точкой $(t_1,t_2)$. Заметим, что если $(t_1,t_2) \in K_\varepsilon$, то из равенства

$$u(t_1,t_2^*) = -\beta(\varepsilon),$$

при любом допустимом $t_1$ в некоторой окрестности точки $(t_2^* = t_2, \varepsilon = 0)$ однозначно определяется $t_2^* = \widetilde{\varphi}(t_1,\varepsilon)$. Здесь $\beta(\varepsilon) > 0$ - непрерывная функция такая, что $\varepsilon \leq \beta(\varepsilon) \leq \varepsilon|\ln\varepsilon|$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Для $x_2^{(n)}(t,\varepsilon)$ $(n \geq 2)$ путь интегрирования $\widetilde{l}$ симметрично для $l$ относительно действительной оси.

Справедливы оценки:

$$\left|\int_{l_1} \exp\frac{1}{3\varepsilon}[u_1(t_1,t_2)] - u_1(\tau_1,\tau_2)d\tau\right| = O(\varepsilon);$$

$$\left|\int_{l_2} \exp\frac{1}{3\varepsilon}[u_1(t_1,t_2)] - u_1(\tau_1,\tau_2)d\tau\right| = O(\delta_0(\varepsilon)),$$

где $\delta_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{|\ln\varepsilon|}\quad (0<\varepsilon\le\varepsilon_0);\quad \left|\int\limits_{l_3}\exp\dfrac{1}{3\varepsilon}[u_1(t_1,t_2)]-u_1(\tau_1,\tau_2)d\tau\right|=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right).$

Следовательно, имеет места оценка

$$\left|\int\limits_{l}\exp\frac{1}{3\varepsilon}[u_1(t_1,t_2)]-u_1(\tau_1,\tau_2)d\tau\right|=O(\delta_0(\varepsilon)),\quad (0<\varepsilon\le\varepsilon_0).$$

Теперь без особых трудностей можно доказать справедливости оценки:

$$\left|x_1^{(k)}(t,\varepsilon)\right|=O(\omega(\tilde r,\tilde\varphi))\delta_0^{k-1}(\varepsilon);\ \left|x_2^{(k)}(t,\varepsilon)\right|=O(\tilde\omega(\tilde r,\tilde\varphi))\delta_0^{k-1}(\varepsilon)\quad (k=1,2,...)$$

при $\varepsilon\to 0\ (0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$ для любого $(t_1,t_2)\in\tilde K_\varepsilon$. Равномерности построенных приближений на $\tilde K_\varepsilon$ доказаны.

**Замечание 1.** Так как $\varepsilon^{\delta}=o(\delta_0(\varepsilon))$ при $\varepsilon\to 0$ $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ для любого постоянного $\delta\ (0<\delta<1)$, то $x^{(k+1)}(t,\varepsilon)$ будет малой поправкой к предыдущему члену $x^{(k)}(t,\varepsilon)$ независимо от значения $t$.

**Замечание 2.** Чтобы получить приближений с любой степени точности надо сузить область $\tilde K_\varepsilon$. Если $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{p}\quad (0<\varepsilon\le\varepsilon_0)$, где постоянное $0<p<1$, то $\delta_0(\varepsilon)=\varepsilon^{\gamma}$. Здесь $\gamma$ - постоянное и $0<\gamma<1$. Тогда получим равномерные приближения с любой степени точности на рассматриваемом множестве.

**Литература:**

1.Каримов С. Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при производных в случае смены устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений». Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.- Ош, 1980, 1-260.

2. Алыбаев К.С. Метод линии уровня исследования сингулярно-возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Дисс. …докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Жалал-Абад, 2001, 1-376.

3. Каримов С.К., Азимбаев М.А., Арипов О.Б. Асиптотическое разложение решения одной конкретной системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в особом критическом случае. Сборник материалов Международной научно-методической конференции «Прикладные вопросы естественных наук». Алматы 2012 г. стр.51-54.

**Рецензент: д.ф-м.н., профессор Алыбаев К.**