

Мальчик Ю.Н.

**О СПОСОБАХ ОТЫСКАНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Yu.N. Malchik

**ABOUT METHODS FOR SEARCH OF APPROXIMATE
FORMULAS FOR SOLUTIONS EQUATIONS' OF SECOND
ORDER'S FREE OSCILATIONS**

УДК: 62-50

В данной статье исследуются методы поиска приближенных формул решения задачи Коши для уравнения свободных колебаний второго порядка.

При этом используются итерационные формулы отыскания аппроксимаций корней обобщенного характеристического уравнения, которое соответствует уравнению свободных колебаний второго порядка.

The author searchlights methods for hunting of approximate formulas to solutions equations' of second order's free oscillations.

In the article iteration formulas are used for hunting of approximate roots of the characteristic equation of free oscillations.

1. Введение

Уравнение свободных колебаний (УСК)

$$\left[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \dots + b_{n-1}(t)p + b_n(t) \right] x(t) = 0, \quad p \equiv \frac{d}{dt}, \quad t \in (t_0, T), \quad (1.1)$$

где, $b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)$ – аналитические функции аргумента t на интервале (t_0, T) , является исчерпывающей внутренней характеристикой нестационарной линейной системы (НЛС). Задачи анализа и синтеза таких систем существенно упрощается, если известно аналитическое выражение общего решения УСК. Однако такая возможность предоставляется только в исключительных случаях (в случаях интегрируемости в квадратурах). В общем же случае речь может идти только о приближенной формуле общего решения УСК. Один из путей отыскания приближенной формулы общего решения УСК состоит в переходе к обобщенному характеристическому уравнению (ОХУ) [1],

$$(p + \zeta)^{n-1} + b_1(t)(p + \zeta)^{n-2} + \dots + b_{n-1}(t) \cdot \zeta + b_n(t) = 0, \quad (1.2)$$

получаемому из (1.1) подстановкой $x = \exp \int \zeta dt$, фундаментальная система корней ζ_1, \dots, ζ_n которого является решениями УСК (1.1) и, в заключение к формированию приближенной формулы общего решения УСК на основе найденных приближенных формул.

В работе [1] изложен ряд итерационных способов отыскания корней ОХУ, в [2] предложен новый итерационный способ для уравнений второго и третьего порядка и в [3] - новый итерационный способ для уравнения второго порядка. Каждый способ имеет свою область применения. Однако эти области пересекаются и для заданного УСК в общем случае существует несколько способов. Возникает вопрос: какому способу отдать предпочтение?

Решение этого вопроса зависит от вида выбранного нулевого приближения. Очевидно, нулевое приближение должно быть выбрано по возможности ближе к точному решению. От этого зависит процесс сходимости.

Поскольку приближенные формулы корней ОХУ желательно получить в аналитическом виде, то УСК, соответствующее нулевому приближению корней, является уравнением, интегрируемым в квадратурах. Для решения задачи необходимо располагать:

- 1) набором видов УСК, интегрируемых в квадратурах,
- 2) методом сравнения этих УСК по признаку их близости к заданному УСК.

После выбора нулевого приближения для способа отыскания приближенных корней ОХУ необходимо:

- 1) располагать набором итерационных способов вычисления корней ОХУ,
- 2) иметь метод сравнения способов применительно к заданному УСК по признаку уточнения исходных приближенных формул корней.

Целью настоящей работы является решение поставленных задач по отмеченной схеме для уравнения свободных колебаний второго порядка.

2. Уравнение свободных колебаний второго порядка, интегрируемое в квадратурах

Общий набор УСК второго порядка

$$\left[p^2 + b_1(t)p + b_2(t) \right] \cdot x(t) = 0, \quad p \equiv \frac{d}{dt}, \quad t \in (0, T), \quad (2.1)$$

интегрируемых в квадратурах, приведен в [4] и дополнен в [5]. Набор таких уравнений можно неограниченно расширять, если задаваться произвольно парами вещественных функций φ_1 и φ_2 , удовлетворяющих условию $\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2 \neq 0$ для всех значений t , и, рассматривая эту пару как фундаментальную систему решений, находить известным способом соответствующее ей дифференциальное уравнение

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & x \\ \varphi_1' & \varphi_2' & x' \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' & x'' \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2)$$

Очевидно, что из (2.2) и (2.1) следует

$$b_1(t) = \frac{\varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_1'' \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}, \quad b_2(t) = \frac{\varphi_1' \varphi_2'' - \varphi_1'' \varphi_2'}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}. \quad (2.3)$$

Описанную методику получения новых интегрируемых вариантов уравнения можно видоизменить.

Ограничимся функциями $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, для которых при всех значениях t , $\varphi_1(t) \neq 0$ и $\varphi_2(t) \neq 0$.

Тогда $\zeta_1 = \varphi_1' / \varphi_1$, $\zeta_2 = \varphi_2' / \varphi_2$ - корни ОХУ. Введем функции c_1 и c_2 :

$$c_1 = -(\zeta_1 + \zeta_2), \quad c_2 = \zeta_1 \zeta_2, \quad (2.4)$$

и запишем алгебраическое уравнение:

$$\zeta^2 + c_1(t) \cdot \zeta + c_2(t) = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение называется корневым уравнением (КУ) [1]. Его коэффициенты, как показано в [2], связаны с коэффициентами ОХУ следующими дифференциальными уравнениями:

$$b_1 = c_1 - \frac{c_1 c_1' - 2 c_2'}{c_1^2 - 4 c_2}, \quad b_2 = c_2 - \frac{2 c_1' c_2 - c_1 c_2'}{c_1^2 - 4 c_2}. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.6) удобны для построения итеративного процесса отыскания корней КУ с последующим отысканием корней ОХУ и его коэффициентов. Этот процесс строится по формулам:

$$c_1^{k+1} = b_1 + \frac{c_1^k c_1'^k - 2 c_2'^k}{(c_1^k)^2 - 4 c_2^k}, \quad c_2^{k+1} = b_2 + \frac{2 c_1^k c_2^k - c_1^k c_2'^k}{(c_1^k)^2 - 4 c_2^k} \quad (2.7)$$

Здесь индекс $k = 0, 1, \dots$

Для многих классов уравнений этот процесс итерации сходится [2].

3. Выбор нулевого приближения и способа аппроксимации решения УСК второго порядка

Естественно предположить, что решения уравнений, коэффициенты которых «близки», будут также «близки», следовательно, в качестве нулевого приближения можно выбрать фундаментальную систему решений уравнения «близкого» к исследуемому уравнению.

Рассмотрим УСК (2.1), решения, которого нужно определить на интервале (t_0, T) при начальных условиях $x'(t_0) = x'_0, x(t) = x_0$, т.е. решить задачу Коши. Уравнению (2.1) соответствует ОХУ

$$\zeta^2 + b_1(t) \cdot \zeta + b_2(t) + \zeta' = 0. \quad (3.1)$$

Пусть имеется набор УСК:

$$\left[p^2 + b_{1,j}(t)p + b_{2,j}(t) \right] \cdot x(t) = 0, \quad p \equiv \frac{d}{dt}, \quad t \in (t_0, T), \quad (3.2)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$, фундаментальная система решений, которых есть соответственно:

$$\varphi_{1,j}(t) \text{ и } \varphi_{2,j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.3)$$

причем функции $\varphi_{1,j}(t)$ и $\varphi_{2,j}(t)$ таковы, что при всех значениях (t_0, T) : $\varphi_{1,j}(t) \neq 0$ и $\varphi_{2,j}(t) \neq 0$.

Предполагается, что коэффициенты b_1, b_2 уравнения (2.1) в промежутке (t_0, T) незначительно отличаются от коэффициентов $b_{1,j}, b_{2,j}$ уравнений (3.2) и характер их изменений достаточно «близок», т.е.:

$$|b_{k,j} - b_k| \leq \sigma_k, \quad |b'_{k,j} - b'_k| \leq \varepsilon_k, \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

В качестве нулевого приближения выбираем из набора (3.3) пару функций, которая наилучшим образом аппроксимирует решение задачи Коши для уравнения (2.1).

Для этого составим систему корней ОХУ для уравнения (3.1):

$$\zeta_{1,j} = \frac{\varphi'_{1,j}}{\varphi_1}; \quad \zeta_{2,j} = \frac{\varphi'_{2,j}}{\varphi_2}, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

Рассматривая их как систему корней для уравнения (3.2) и подставляя значения (3.4) в это уравнение, находим невязки:

$$\zeta_{k,j}^2 + b_{1,j}(t) \cdot \zeta_{k,j} + b_{2,j}(t) + \zeta'_{k,j} = \Delta_{k,j}^0, \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

В качестве нулевого приближения корней ОХУ (3.1) выбираем из системы (3.4) ту пару, которой соответствует наименьшая невязка. Для сравнения невязок $\Delta_{k,j}^0(t)$ переходим к числовым оценкам по формуле:

$$I_{1,j}^0 = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T |\Delta_{k,j}^0(t)| \cdot dt \quad (3.6)$$

Теперь необходимо выбрать способ уточнения приближенных формул корней $\zeta_k^0, k = 1, 2$. Для этого способами, изложенными в [1-3], находим набор приближенных корней $\zeta_{k,l}^1 (k = 1, 2; l = 1, 2, \dots)$. Далее, подставляем значения $\zeta_{k,l}^1$ в ОХУ (3.1), и получаем набор невязок $\Delta_{k,j}^1(t)$. В качестве первого приближения корней ζ_k^1 ОХУ (3.1) выбираем ту пару функций $\zeta_{k,l}^1$, которая дает наименьшие невязки. Невязки оцениваем по формуле (3.6). Для дальнейших уточнений приближенных формул корней ОХУ (3.1) применяем тот способ, которым получено первое приближение $\zeta_{k,l}^1$.

В конечном итоге нас интересует переходный процесс исследуемого УСК системы. Поэтому нужно сравнить приближенное решение УСК, полученное аналитически с точным решением этого уравнения, полученным на ЭВМ. Если результат сравнения решений нас устраивает, то процесс уточнения приближенных формул следует закончить.

Может оказаться так, что нулевое приближение корней ОХУ выбрано так удачно, что оно лучше всех последующих уточненных приближений. Тогда надо ограничиться нулевым приближением.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему, УСК которой имеет вид

$$\left[p^2 + (t^2 + t + 1) \cdot p + (t^2 + t + 1)^2 / 4 \right] \cdot x(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x'(0) = 1, x(0) = 0. \quad (3.7)$$

Найти приближенное решение задачи Коши.

Решение. Уравнению (3.7) соответствует ОХУ

$$\zeta^2 + (t^2 + t + 1) \cdot \zeta + (t^2 + t + 1)^2 / 4 + \zeta' = 0. \quad (3.8)$$

Найдем аппроксимации корней этого уравнения. Для уравнения (3.7) «близким» является УСК

$$\left[p^2 + (t^2 + t + 1) \cdot p + (t^2 + t + 1)^2 / 4 + t - 1/2 \right] \cdot x(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x'(0) = 1, \quad x(0) = 0. \quad (3.9)$$

Это следует из графиков (рис.1) решений задачи Коши для уравнений (3.7) и (3.9) полученных с помощью ЭВМ.

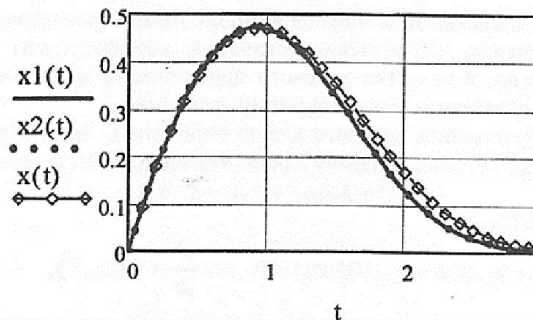


Рис. 1.

Здесь: $x(t)$ и $x1(t)$ – решения на ЭВМ задачи Коши для уравнений (3.7) и (3.9), выполненные в среде MathCAD в блоке Given ... Odesolve.

Уравнению (3.9) соответствует ОХУ

$$\zeta^2 + (t^2 + t + 1) \cdot \zeta + (t^2 + t + 1)^2 / 4 + t - 1/2 + \zeta' = 0, \quad (3.10)$$

корнями которого являются функции:

$$\zeta_{1,2} = -\frac{t^2 + t + 1}{2} \pm 1. \quad (3.11)$$

Значения функций (3.11) считаем нулевым приближением корней уравнения (3.8). Уточним нулевые приближения.

С учетом значений (3.11) по формулам (2.4) получим коэффициенты корневого уравнения:

$$c_1^0 = t^2 + t + 1; \quad c_2^0 = (t^2 + t + 1)^2 / 4 - 1. \quad (3.12)$$

Далее, учитывая (3.12) по итерационным формулам (2.7) получим

$$c_1^1 = b_1, \quad c_2^1 = b_2 - t - 1/2.$$

Здесь: b_1, b_2 – коэффициенты ОХУ (3.9).

Тогда уточненное КУ будет

$$\zeta^2 + (t^2 + t + 1) \cdot \zeta + (t^2 + t + 1)^2 / 4 - t - 1/2 = 0.$$

Его корни ζ_1, ζ_2 являются приближенными корнями ОХУ (3.8):

$$\zeta_{1,2} = -\frac{t^2 + t + 1}{2} \pm \sqrt{t + \frac{1}{2}}. \quad (3.13)$$

Отсюда аппроксимация общего решения УСК (3.7) может быть представлена в виде

$$x_{общ} = k_1 \exp \left[-\int_0^t \left(\frac{v^2 + v + 1}{2} + \sqrt{v + \frac{1}{2}} \right) dv \right] + k_2 \exp \left[-\int_0^t \left(\frac{v^2 + v + 1}{2} - \sqrt{v + \frac{1}{2}} \right) dv \right] \quad (3.14)$$

С учетом (3.13) и начальных условий приближенное решение задачи Коши для УСК (3.7) может быть представлено в виде

$$x = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \left[\frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{2} \right)^{3/2} - \left(\frac{1}{3} \right)^{3/2} \right] - \frac{\sqrt{2}}{2} \exp \left[-\frac{2}{3} \left(t + \frac{1}{2} \right)^{3/2} + \left(\frac{1}{3} \right)^{3/2} \right] \right\} \exp \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \right) \quad (3.15)$$

Однако аппроксимация (3.15) решения уравнения (3.7) оказалась хуже, чем нулевое приближение, полученное с помощью формул (3.11). Это очевидно из графиков рис.2. Здесь: $x(t)$ - точное решение уравнения (3.7), полученное на ЭВМ; $g(t)$ - график приближенного решения (3.15).

Таким образом, в качестве приближенного решения задачи Коши выбираем решение уравнения (3.9)

$$x_{общ} = c_1 \exp \left[-\int_0^t \left(\frac{v^2 + v + 1}{2} - 1 \right) dv \right] + c_2 \exp \left[-\int_0^t \left(\frac{v^2 + v + 1}{2} + 1 \right) dv \right], \quad (3.16)$$

где c_1 и c_2 произвольные постоянные, которые находим из (3.16) с учетом начальных условий (3.9).

Тогда приближенное решение задачи Коши имеет вид

$$x = \left\{ \frac{1}{2} \exp(t) - \frac{1}{2} \exp(-t) \right\} \exp\left(-\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2}\right). \quad (3.17)$$

График этого решения $x_2(t)$ изображен на рис.1.



Рис. 2.

В работе [1] рассмотрен способ приближенного вычисления корней ОХУ, как решение квадратного уравнения (3.1)

$$\zeta_{1,2} = -\frac{b_1}{2} - \frac{D'}{4D} \pm \sqrt{D}. \quad (3.18)$$

Здесь: функция

$$D(t) = \frac{b_1^2}{4} + \frac{b_1'}{2} - b_2 \quad (3.19)$$

названа детерминантом. Формула (3.18) получена при допущении

$$\frac{d}{dt} \left| \sqrt{\frac{b_1^2}{4} + \frac{b_1'}{2}} - \zeta_{1,2} \right| \ll |D(t)| \quad (3.20)$$

Там же сделано *утверждение*, что если детерминант (3.19) удовлетворяет условию:

$$D = k, \quad k = \text{const}, \quad k \neq 0, \quad (3.21)$$

то формула (3.18) дает точные значения корней ζ_1, ζ_2 уравнения (3.1)

Пример 2. Рассмотрим линейную систему, УСК которой имеет вид

$$[p^2 - 2(at + d)p + (at + d)^2/4] \cdot x(t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x'(0) = 1, \quad x(0) = 0. \quad (3.22)$$

Найти приближенное решение корней ОХУ (3.1), если:

$$b_1 = -2(at+b); \quad b_2 = (at+b)^2 - a. \quad (3.23)$$

Решение. С учетом (3.23) по формуле (3.19) получим $D = 0$. Условия (3.21) не выполняются, следовательно, нужно применять другой способ вычисления приближенных корней.

Для решения ОХУ второго порядка в [3] предложена рекуррентная формула

$$\zeta_i^{(k)} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\Delta} \left(1 - \frac{\zeta_i^{(k-1)}}{2\Delta} \right) \quad (3.24)$$

где

$$\Delta = -\frac{b_1^2}{4} - b_2. \quad (3.25)$$

Полагая $\zeta^{(0)} = 0$, из (3.24) получим

$$\zeta_i^{(1)} = -\frac{b_1}{2} \pm \sqrt{\Delta} \quad (3.26)$$

Найдем приближенное решение корней ОХУ (3.1), при условии (3.23). С учетом (3.23), (3.26) и (3.25) из (3.24) получим $\zeta_i^{(2)} = \zeta_i$:

$$\zeta_i = at + d \pm \frac{\sqrt{a}}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.27)$$

Однако, работе [6] найдены точные корни ОХУ (3.1) с коэффициентами (3.23):

$$\zeta_1 = at + d; \quad \zeta_2 = at + d + \frac{a}{at+d}. \quad (3.28)$$

Отсюда общее решение УСК(3.22) может быть представлено в виде

$$x_{\text{общ}} = c_1 \exp\left(\frac{a}{2}t^2 + dt\right) + c_2 (at + d) \exp\left(\frac{a}{2}t^2 + dt\right). \quad (3.29)$$

4. Заключение

В результате исследования методов поиска приближенных формул общего решения для уравнений свободных колебаний НЛС второго порядка предложены: метод сравнения уравнений свободных колебаний по признаку близости к заданному уравнений свободных колебаний; метод сравнений свободных колебаний по признаку близости к заданному уравнений свободных колебаний; метод сравнения способов уточнения приближенных формул корней обобщенного характеристического уравнения.

Литература:

1. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем М.: Машиностроение, 1977.-296 с.
2. Михайлов Ф.А., Хаджинов М.К. применение обобщенного характеристического уравнения к расчету процессов в нестационарных линейных системах.// В кн: «Труды МАИ им. С.Орджоникидзе». М.: вып. 282, 1974, с. 96-105.
3. Кузнецов В.П., Михайлов Ф.А., Саликова И.М. и др. К вопросу приближенного вычисления корней обобщенного характеристического уравнения нестационарной линейной системы.// В. сб. Системы и средства автоматизации производства». Киев, 1974, с. 106-112.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: «Наука», 1976, 576 с.
5. Мальчик Ю.Н. Некоторые признаки интегрируемости в квадратурах уравнения свободных колебаний нестационарной линейной системы.// В кн. Теория автоматического управления и регулирования. Межвуз. сб. научных трудов. М.: МИРЭА, 1978, с. 54-63.
6. Мальчик Ю.Н., Михайлов Ф.А. Об одном особом случае вычисления корней обобщенного характеристического уравнения нестационарной линейной системы.// Сб. научн. трудов. Вопросы исследования и проектирования систем управления М.: 1980 с.5-13.

Рецензент: д.тех.н. Адигамов Н.С.