Каримов С. А., Азимбаев М.А.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОНКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОСОБОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

S.K. Karimov, M.A. Azimbaev

ASYMPTOTIC EXPANSIONS FOR ONE PARTICULAR SYSTEM OF SINGULARLY PERTURBED ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AT SINGULAR CRITICAL CASE

УДК:517.928

В работе получена асимптотическое разложения решения системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений с любой степени точностью в особом критическом случае.

In this paper we obtain asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed ordinary differential equations with any degree of accuracy in a special critical case.

Рассмотрим задачу:

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = D(t)x + \varepsilon h, \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = \varepsilon h, \tag{2}$$

где $D(t) = diag\left\{ (t+i)^2, (t-i)^2 \right\}$, $h = colon(1,1)$, $t \in [0,\sqrt{3}]$, $\varepsilon > 0 -$ малый параметр.

Решение задачи (1), (2) имеет вид:

$$x(t,\varepsilon) = \left\{ \varepsilon \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t D(s)ds\right] + \int_0^t \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t D(s)ds\right]d\tau \right\} h. \tag{3}$$

Ставится вопрос как решение (3) представить в виде асимптотического разложения:

$$x(t,\varepsilon) = f_1(t,\varepsilon) + f_2(t,\varepsilon) + \dots, \tag{4}$$

где $f_2(t,\varepsilon) = o(f_1(t,\varepsilon)),\dots$ при $\varepsilon \to 0$ на $t \in [0,\sqrt{3}]$.

Условия устойчивости [1] для решение (3) имеет место при $t < 1$. Для $[1,\sqrt{3}]$ условие устойчивости не имеет место. Поэтому на $[0,1-\alpha]$, где $0 < \alpha << 1$, имеет место разложение в виде суммы регулярного и пограничного ряда по степеням малого параметра ε. При этом для оценки остаточного члена разложения существенно опирается на условию устойчивости. На рассматриваемом отрезке $[0,\sqrt{3}]$ условия устойчивости [1] не имеет место и кроме этого $\mathrm{Re}\int_0^{\sqrt{3}}(s \pm i)^2 ds = 0$.

Такой случай будем называть особый критический случай.

Если $t \in [0,1]$, то справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = 0. \tag{5}$$

Переходя в комплексной области, будем показать справедливости равенство (5) для $t \in [0,\sqrt{3}]$. Выделим главный член асимптотического разложения решения $x(t,\varepsilon)$.

Пусть $x(t,\varepsilon) = colon(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$. Тогда решения (3) в координатах имеет вид:

$$x_k(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (s\pm i)^2\,ds\right]+\int_0^t \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t (s\pm i)^2\,ds\right]d\tau.$$

Пусть $t=t_1+it_2,\ \tau=\tau_1+i\tau_2;\qquad t+i=\widetilde{r}e^{i\widetilde{\varphi}},\ \tau+i=re^{i\varphi},$
$t-i=\widetilde{r}'e^{i\widetilde{\varphi}'},\ \tau-i=r'e^{i\varphi'};$

$$u_1(t_1,t_2)=u_1(\widetilde{r},\widetilde{\varphi})=\frac{1}{3}\mathrm{Re}(t+i)^3=\frac{1}{3}\widetilde{r}^3\cos 3\widetilde{\varphi};$$

$$u_2(t_1,t_2)=u_2(\widetilde{r}',\widetilde{\varphi}')=\frac{1}{3}\mathrm{Re}(t-i)^3=\frac{1}{3}(\widetilde{r}')^3\cos 3\widetilde{\varphi}',$$

где $t_1,t_2;\ \tau_1,\tau_2;\ \tilde{r},\tilde{r}',\tilde{\phi},\tilde{\phi}';\ r,r',\phi,\phi'$ – действительные переменные.

$H_0=\{(t_1,t_2):u_k(t_1,t_2)\le 0,k=1,2\}=[ABC]$ – замкнутый треугольник с вершинами в точках $A(0,-1),B(0,1),C(0,\sqrt{3})$. Действительный ось является осью симметрии для H_0.

Если $(t_1,t_2)\in H_0$, то справедлива оценки:

$$\left|\varepsilon\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (s\pm i)^2\,ds\right]\right|\le\varepsilon\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}u_k(t_1,t_2)\right];$$

$$\left|\int_0^t \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t (s\pm i)^2\,ds\right]d\tau\right|\le\left|\int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[u_k(t_1,t_2)-u_k(\tau_1,\tau_2)\right]\right\}|d\tau|\right|.$$

Поэтому будем иметь для $(t_1,t_2)\in H_0$ оценки:

$$|x_k(t,\varepsilon)|\le\varepsilon\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}u_k(t_1,t_2)\right]+J_k(t,\varepsilon),$$

где $$J_k(t,\varepsilon)=\left|\int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left[u_k(t_1,t_2)-u_k(\tau_1,\tau_2)\right]\right\}|d\tau|\right|\quad (k=1,2).$$

Теперь будем оценить интеграл $J_1(t,\varepsilon)$. Оценка интеграла $J_2(t,\varepsilon)$ будет аналогично.

Пусть $\tilde{\phi}_{01},\tilde{\phi}'_{01}$ две последовательные решения уравнения, $\cos(n+1)\tilde{\phi}=0$, причем $\cos(n+1)\tilde{\phi}<0$ при $\tilde{\phi}\in(\tilde{\phi}_{01},\tilde{\phi}'_{01})$. Здесь и в дальнейшем $n=2\ \ (n+1=3)$. Тогда имеется единственное решение $\widetilde{\varphi}_0\in(\widetilde{\varphi}_{01},\widetilde{\varphi}'_{01})$ уравнения $\cos(n+1)\widetilde{\varphi}_0=-1$.

Пусть $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\ln\varepsilon$ при $0<\varepsilon\le e^{-1}$ и $\delta(0)=0$; δ_0 - постоянное, причем $0<\delta_0<<1$; Теперь возьмем две решение ϕ_1,ϕ'_1 уравнения $\cos(n+1)\phi=\delta_0$ так, чтобы $\phi_1\to\tilde{\phi}_{01}$, $\phi'_1\to\tilde{\phi}'_{01}$ при $\delta_0\to 0$. Далее возьмем Φ_0,Φ'_0 такие, что $\cos(n+1)\Phi_0=\cos(n+1)\Phi'_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, причем $\Phi_0\in(\tilde{\phi}_{01},\tilde{\phi}_0)$, $\Phi'_0\in(\tilde{\phi}_0,\tilde{\phi}'_{01})$. Фигуры H_0 будем делить на четыре части: $H_0=H_\varepsilon\cup H_\varepsilon^{(0)}\cup H_\varepsilon^{(1)}\cup H_\varepsilon^{(2)}$, где

$$H_\varepsilon=\left\{(\tilde{r},\tilde{\phi}):0\le\tilde{r}\le\varepsilon^{\frac{1}{n+1}};\ \tilde{\phi}\in\left[\tilde{\phi}_{01},\tilde{\phi}'_{01}\right]\right\};$$

Заметим, что из равенства

$$u_1\left(t_1^*,0\right)=\frac{2}{3}\delta(\varepsilon),$$

(6)

в некоторой окрестности точки $\left(t_1^*=0, \varepsilon=0\right)$ однозначно определяется $t_1^*=\gamma(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon)\geq 0$ - непрерывная функция от ε при $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma(\varepsilon)=0$.

Аналогично из равенства (6) в некоторой окрестности точки $\left(t_1^*=\sqrt{3}, \varepsilon=0\right)$ однозначно определяется $t_1^*=T(\varepsilon)=\sqrt{3}-\tilde{\gamma}(\varepsilon)$, где $\tilde{\gamma}(\varepsilon)\geq 0$ - непрерывная функция от ε при $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}(\varepsilon)=0$.

Пусть $f_1(t,\varepsilon)=0$ *при* $0\leq t<T(\varepsilon)$; $f_1(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\exp\left\{\frac{1}{3\varepsilon}\left[(t+i)^3-(\tau+i)^3\right]\right\}d\tau$

при $T(\varepsilon)\leq t\leq\sqrt{3}$;

$$f_2^*(t,\varepsilon)=\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right]\left\{\varepsilon+\int\limits_0^t\exp\left[-\frac{1}{3\varepsilon}(\tau+i)^3\right]d\tau\right\} \text{ при } 0\leq t<T(\varepsilon).$$

$$f_2^*(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right] \text{ при } T(\varepsilon)\leq t\leq\sqrt{3}.$$

Тогда $x_1(t,\varepsilon)=f_1(t,\varepsilon)+f_2^*(t,\varepsilon)$, причем $f_1(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$, $f_2^*(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ при $0\leq t\leq\sqrt{3}$.

Далее введем следующие функции:

$$f_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right]+\int\limits_0^t\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}\left((t+i)^3-(\tau+i)^3\right)\right]d\tau \text{ при } \quad t\in\left[0,\gamma(\varepsilon)\right),$$

$$f_2(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}\left((t+i)^3-(\tau+i)^3\right)\right]d\tau \text{ при } \gamma(\varepsilon)\leq t\leq T(\varepsilon) \quad \left(t\in\left[\gamma(\varepsilon),\ T(\varepsilon)\right]\right),$$

$$f_2(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right] \text{ при } t\in[T(\varepsilon),\sqrt{3}].$$

$f_3^*(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left[\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right]$ при $t\in\left[\gamma(\varepsilon),T(\varepsilon)\right]$; $f_3^*(t,\varepsilon)=0$ при $t\in[0,\gamma(\varepsilon))\cup(T(\varepsilon),\sqrt{3}]$.

Тогда $f_2^*(t,\varepsilon)=f_2(t,\varepsilon)+f_3^*(t,\varepsilon)$, $x_1(t,\varepsilon)=f_1(t,\varepsilon)+f_2(t,\varepsilon)+f_3^*(t,\varepsilon)$, $f_2(t,\varepsilon)=O(\varepsilon)$, $f_3^*(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1+m}\right)$ $\left(m=\frac{2}{3}\right)$ при $t\in[0,\sqrt{3}]$.

Решая уравнения $u_1\left(t_1^*,0\right)=m\delta(\varepsilon)$, где m – натуральное число, соответственно, в окрестности точки $\left(t_1^*=0, \varepsilon=0\right)$ $\left(\left(t_1^*=\sqrt{3}, \varepsilon=0\right)\right)$ однозначно определим $t_1^*=\gamma_m(\varepsilon)$ $t_1^*=\sqrt{3}-\tilde{\gamma}_m(\varepsilon)$, где $\gamma_m(\varepsilon)\geq 0$ $\left(\tilde{\gamma}_m(\varepsilon)\geq 0\right)$ - непрерывная функция от ε при $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\gamma_m(\varepsilon)=0$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{\gamma}_m(\varepsilon)=0\right)$.

Пусть $\phi_m(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon\exp\left(\dfrac{(t+i)^3}{3\varepsilon}\right) & при\ t\in[\gamma_m(\varepsilon),T_m(\varepsilon)],\\ 0 & при\ \ t\in[0,\gamma_m(\varepsilon))\cup(T_m(\varepsilon),\sqrt{3}],\end{cases}$

где $T_m(\varepsilon)=\sqrt{3}-\widetilde{\gamma}_m(\varepsilon)$. Тогда $\varphi_m(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1+m})$ при $0\le t\le\sqrt{3}$.

Следовательно, $\varphi_m(t,\varepsilon)=o\ \ (\varphi_{m-1}(t,\varepsilon))$ при $0\le t\le\sqrt{3}$.

Пусть $f_3(t,\varepsilon)=f_3^*(t,\varepsilon)-\phi_m(t,\varepsilon)$ при $0\le t\le\sqrt{3}$. Тогда $f_3(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1+\frac{2}{3}}\right)$;

$\phi_m(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1+m})\ \ (m=1,2,...)$ при $0\le t\le\sqrt{3}$.

$$f_3(t,\varepsilon)=\begin{cases}0\ \ при\ \ t\in[0,\gamma(\varepsilon))\cup[\gamma_m(\varepsilon),T_m(\varepsilon)]\cup(T(\varepsilon),\sqrt{3}];\\ \varepsilon\exp\left(\dfrac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right)\ \ при\ \ t\in[\gamma(\varepsilon),\gamma_m(\varepsilon))\cup(T_m(\varepsilon)\cup T(\varepsilon)].\end{cases}$$

Пусть $\varphi_m(t,\varepsilon)-\varphi_{m+1}(t,\varepsilon)=\varphi_m^*(t,\varepsilon)$,

где $\phi_m^*(t,\varepsilon)=0\ при\ \ t\in[0,\gamma_m(\varepsilon))\cup[\gamma_{m+1}(\varepsilon),T_{m+1}(\varepsilon)]\cup(T_m(\varepsilon),\sqrt{3}]$;

$$\phi_m^*(t,\varepsilon)=\varepsilon\exp\left(\frac{1}{3\varepsilon}(t+i)^3\right)\ \ при\ \ t\in[\gamma_m(\varepsilon),\gamma_{m+1}(\varepsilon))\cup(T_{m+1}(\varepsilon)\cup T_m(\varepsilon)].$$

Тогда $\phi_m(t,\varepsilon)=\phi_{m+1}(t,\varepsilon)+\phi_m^*(t,\varepsilon)$, причем $\phi_m^*(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{1+m})$ при $0\le t\le\sqrt{3}$,

$\phi_{m+1}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{2+m})$ при $0\le t\le\sqrt{3}$.

Таким образом, будем иметь следующие асимптотическое разложение $x_1(t,\varepsilon)=f_1(t,\varepsilon)+f_2(t,\varepsilon)+f_3(t,\varepsilon)+\phi_1^*(t,\varepsilon)+\phi_2^*(t,\varepsilon)+,...$, где на отрезке $0\le t\le\sqrt{3}$ имеет места оценки:

$$f_1(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right);\quad f_2(t,\varepsilon)=O(\varepsilon);\quad f_3(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{1+\frac{2}{3}}\right);\quad \phi_1^*(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2);$$

$\phi_2^*(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3)$;

Аналогичное разложение имеет место для $x_2(t,\varepsilon)$.

Литература:

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973г.

2. Каримов С.К., Азимбаев М.А., Арипов О.Б. Аситотическое разложение решения одной конкретной системы сингулярно-возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений в особом критическом случае. Сборник материалов Международной научно-методической конференции «Прикладные вопросы естественных наук». Алматы 2012 г. стр.51-54.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Алыбаев К.