Рысбайулы Б., Махамбетова Г.

ОДИН УСТОЙЧИВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В НЕОДНОРОДНОМ ГРУНТЕ

B.Rysbaiuly, G. Makhambetova

A ROBUST METHOD OF THE INVERSE PROBLEM OF DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN NON-UNIFORM GROUND

УДК:519.62:624.131

В работе изучается обратная задача процесса распространения тепла в неоднородной среде. Использую температура заданной на части границы ищется коэффициент теплопроводности грунты. Предлагается итерационный метод и доказывается его сходимость.

This work studies the reciprocal sum of the heat distribution process in multivendor environment. Using the temperature, specified on the parts of the border, the coefficient of themal conduction is finding. The iterative method is offered and its convergence is proved.

В связи с развитием техники и производства все больше и больше приходится решать обратные задачи. Одной из такой задач производства является определение геологического состава земли. Существует различные методы: электромагнитные, звуковые и т.д. Измеряя отраженные звуковые или сейсмические сигналы, определяется геологический состав исследуемой части земли. В настоящей работе излагается один метод такого характера, с помощью которой ищется геологический состав грунта. А именно зная температуры на поверхности земли за определенное время, устанавливается некоторые характеристики грунта. В нашем случае это коэффициент теплопроводности.

1. Постановка задачи.

В настоящей работе изучается одномерная задача распространения температуры в грунте. Вообще любая задача переноса тепла в неоднородной области является трехмерной задачей, но, если размеры ширины и длины рассматриваемой области достаточно большие, причем поверхность рассматриваемой части земли почти ровный, то в этом случае градиент температуры по горизонтали почти равен нулю. В этом случае вместе трехмерной задачи можно рассмотреть одномерную задачу.

Пусть в области $Q = (0,H)x(0,T)$, $z \in (0,H)$, $t \in (0,T)$ происходить распространения тепла под действием температуры окружающей среды, в нашем случае это температура воздуха. Многочисленными экспериментами была доказано, что распространения тепла в грунте описываются уравнением теплопроводности [1-2]

$$\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(z)\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) \quad (1)$$

где γ_0 - удельная масса грунта, *кг/м*^{3}; *C* - теплоемкость грунта, *ккал 1 кг*град* λ –коэффициент теплопроводности, *ккал /м* час * град* .

На поверхности земли с воздухом справедливо закон сохранения энергий

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H} + \alpha(\theta - T_b)\Big|_{z=H} = 0 \quad (2)$$

Установлено, что на определенной глубине земли температура грунта остается постоянной величиной. Используя этот факт, ставится граничное условие

$$\theta\ (0,\ t)=T_1 = const \quad (3)$$

Отметим, что ось *Oz* направлено вертикально вверх. В начальный момент времени, при t=0 распределение температуры в грунте задается, т.е. $\theta\ (z,\ 0) = \theta_0\ (z),\ 0 \le z \le H$ (4)

Для того чтобы определить коэффициент теплопроводности неоднородного грунта дополнительно задается температура на поверхности земли

$$\theta(H,t) = \theta_1(t), 0 < t < T \quad (5)$$

С учетом (5) условие (2) записывается в виде

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H} + \alpha(\theta_1(t) - T_b)\Big|_{z=H} = 0$$

где α -коэффициент теплоотдачи грунта в окружающую среду, *ккал / (м*^{2} ** час * град)*. В данной работе рассматривается неоднородный грунт, т.е. от z=O $_{до}$ $z=H$ грунт состоит из нескольких слоев. Не нарушая общности можно считать, что грунт состоит из трех слоев. При переходе от одного слоя другому слою температура и поток температуры остается непрерывной величиной

$$[\theta(z,t)]z = z_k = 0, \left[\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}\right] z = z_k = 0, k = 1,2,3. \tag{6}$$

Здесь z_k, к = 1,2,3 координата перехода от одного слоя к другому слою. В формуле (6) $[f(z,t)]_{z,k} = f(z_k+0,t)-f(z_k-0,t)$ выражает разрыв функций $f(z,t)$ в точке $z=z_k$.

Решение задачи (1)-(6) подробно изучена в работах [3-5].

訣. Сопряженная задача

Система (1)-(6) справедливо для $\lambda_n(z)$ и $\lambda_{n+1}(z)$. Здесь $\lambda_n(z)$ -начальное приближение функций $\lambda_n(z)$. Поэтому справедливо равенства

$$\gamma_0 C \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{n+1}(z)\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z}\right) \text{ и } \gamma_0 C \frac{\partial \theta^n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n(z)\frac{\partial \theta^n}{\partial z}\right)$$

где $\theta^n(z,t)$, $\theta^{n+1}(z,t)$ соответственно решение задачи (1)-(6) при $\lambda_n(z)$ и $\lambda_{n+1}(z)$. Тогда для разности $\delta\theta=\theta^{n+1}(z.t) - \theta^n(z,t)$ получаем задачу

$$\gamma_0 C \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right), \tag{7}$$

$$\delta\theta(0,t) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda_n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right)_{z=H} = 0, \tag{9}$$

$$\delta\theta(0,t) = 0, \tag{10}$$

где $\delta\lambda=\lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z)$

Рассуждая также как в работе [6] получаем сопряженную задачу

$$\gamma_0 c \frac{\partial \psi^n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \psi^n}{\partial z}\right), \tag{11}$$

$$\Psi^n(T, z) = 0, \Psi^n(t, 0) = 0 \tag{12}$$

Следует отметить, что некоторые математические вопросы обратной задачи однородного и неоднородного грунта мы рассмотрели в работах [6-8].

3. Градиент функционала

Приближенное значение коэффициента теплопроводности грунта ищется из минимума функционала:

$$J(\lambda) = \int_0^T [\theta(H,t,\lambda) - \theta_1(t)]^2 dt$$

Здесь $\theta(H,t,\lambda)$ температура грунта на поверхности земли полученной после решения задачи (1)-(6).

Сначала вычисляется приращение функционала

$J(\lambda_n + \delta\lambda) - J(\lambda_n) = 2\int_0^T \delta\theta(\theta(H,t,\lambda_n) - \theta_1(t))dt + \int_0^T (\delta\theta)^2 dt.$

Используя прямой и сопряженной задачи, выводим [6]

$$J(\lambda + \delta\lambda) - J(\lambda) = \int_0^T \int_0^H \left[\delta\lambda \frac{\partial \theta(\lambda_{n+1})}{\partial z}\right] \frac{\partial \psi(\lambda_n)}{\partial z} dz dt - \int_0^T (\delta\theta)^2 dt.$$

$$\delta\lambda = -\beta \int_0^T \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial z} dt$$

Положим

$$J(\lambda + \delta\lambda) - J(\lambda) = -\frac{1}{\beta}\int_0^H (\delta\lambda)^2 dz - \int_0^T (\delta\theta)^2 dt$$

Тогда

То есть минимизируется функционал $J(\lambda)$.

4. Алгоритм решения задачи

1. Пусть приближение $\lambda_n(z)$ известно
2. Решается прямая задача

$$\gamma_0 c \frac{\partial \theta^n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\right), \tag{13}$$

$$\lambda \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\Big|_{z=H} + \alpha(\theta_1(t) - T_b)\Big|_{z=H} = 0 \tag{14}$$

$$\Theta^n(0,t)=T_1,\ \Theta^n(z,0)=\Theta_0(z) \tag{15}$$

и определяется $\frac{\partial \theta(z,t)}{\partial z}$ и $\Theta(H,t,\lambda_n)$

3) Решается сопряженная задача

$$\gamma_0 c \frac{\partial \psi^n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_n \frac{\partial \psi^n}{\partial z}\right), \tag{16}$$

$$\Psi^n(T, z) = 0,\ \Psi^n(t, 0) = 0 \tag{17}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial \psi^n}{\partial z}\Big|_{z=H} = -2(\theta H, t, \lambda_n) - \theta_1(t)) \tag{18}$$

4) Следующее приближение коэффициента теплопроводности определяется по формуле:

$$\gamma_{n+1}(z) = \lambda_n(z) - \beta \int_0^T \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dt, \beta > 0$$

4. Априорные оценки прямой задачи

Теорема 1. Для решение задачи (13)-(15) справедливо оценка

$$\frac{1}{2}\gamma_0 C\|\theta^n\|^2 + \int_0^T \left\|\sqrt{\lambda_n}\frac{\partial \theta^n}{\partial z}\right\|^2 dt + \frac{a}{2}\int_0^T (\theta^n(H,t))^2 dt \le \frac{a}{2}\int_0^T T_{воз}^2(t)dt + \frac{1}{2}\gamma c\|\theta_0^n\|^2 = c_1 \tag{19}$$

$$\max_t \max_z |\theta(z,t)| = M < \infty$$

Теорема 2. Для решение задачи (1б)-(18) справедливо оценка

$$\gamma_0 c \int_0^H (\psi^n)^2 dz + \frac{1}{2}\int_t^T \int_0^H \lambda_n \left(\frac{\partial \psi^n}{dz}\right)^2 dzadt \le c_2 < \infty \tag{20}$$

На основе (19) и (20) получаем, что

$$|\nabla J(\lambda(z))| = \int_0^T \int_0^H \frac{\partial \theta^n}{\partial z}\frac{\partial \psi^n}{\partial z} dzad \le \left(\int_0^T \int_0^H (\frac{\partial \theta^n}{\partial z})^2 \cdot \lambda_n dzdt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^H \lambda_n \left(\frac{\partial \psi^n}{\partial z}\right)^2 dzdt\right)^{1/2} \frac{1}{\lambda_n} \le c_3$$

Теорема 3. Последовательность сходится к одному пределу и ограничено сверху и снизу по-

Теорема 4. Последовательность положительной константой.

Заключение. Изложенный выше приближенный метод расчета коэффициента теплопроводности неоднородного грунта обеспечивает простой алгоритм расчета искомого коэффициента. Доказанные теоремы гарантирует достоверность полученных числовых данных после реализаций разработанного метода на ЭВМ.

Литература:

1. Мартынов Г.А. Тепло - и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). -М.: 1959, под. ред. Н.А. Цытович. гл. VI стр. 153-192.
2. Чудновский А.Ф. Теплобмен в дисперсных средах. - М. Гостехиздат, 1954, 444 с
3. Адамов А.А. Процессы протаивания грунта //Доклады НАН РК. -2007. -№1. - С. 16-19.
4. Жумагулов Б.Т., Рысбайулы Б., Адамов А.А. Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. - №5. - С. 30-41.
5. Рысбайулы Б., Адамов А.А. Исследование изменений теплоемкости фазовой зоны в многослойном грунте // Доклады НАН РК. 2007. -№4. - С. 14-17.
6. Рысбайулы Б., Маханбетова Г.И. Разностная схема для обратной задачи кондуктивного распространения тепла в однородной среде // ДАН РК, 2008, №1, ст. 15-18.
7. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.

Теорема 3. Последовательность ложительной константой.

8. Рысбайулы Б. Идентификация коэффициента теплопроводности распространения тепла в неодно-родной среде// Вестник КБТУ, 2008, № 1, ст. 62-65 является монотонно убывающей и ограничено сверху

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Калимолдаев М.Н.