Байманкулов А.Т.

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА ВЛАГИ В НЕНАСЫЩЕННОЙ ЗОНЕ

A.T. Baimankulov

STABILITY OF DIFFERENCE SCHEMES IN THE PROCESS COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS OF MOISTURE TRANSPORT IN THE UNSATURATED ZONE

УДК: 519.62:624.131

В статье изучается задача процесса переноса влаги в ненасыщенной зоне и устойчивость разностных схем.

In this paper we study the process of moisture transport in the unsaturated zone and the stability of difference schemes.

1. Постановка задачи.

В работе изучается система атмосфера - ненасыщенная зона - грунтовая вода. Движение воды в системе имеет непрерывный характер. Теория движения воды в почве при изотермических условиях для ненабухающих и недеформирующихся грунтов основано на закон Букингема /1/, которое выражает связь между потоком и градиентом потенциала переноса. Аналитическая запись закона Букингема записано в виде $q = -D\frac{\partial W}{\partial z} - K$Ричардсоном /2/ и Чайлосом /3/.

Здесь - коэффициент диффузии влаги,q- удельный поток воды, K - коэффициент гидравлической проводимости почвы,W- влажность грунта. Уравнение неразрывности для ненасыщенного потока можно представит в виде /4/.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) \qquad (1)$$

В начальный момент распределение влаги задается. То есть

$$W(z,0) = W_0(z)$$

На границе поверхности почвы и атмосферы задается граничное условие второго рода

$$\frac{\partial W(H,t)}{\partial z} = A(t)$$

На границе грунтовых вод с почвой задается первое граничное условие

$$W(0,t) = W_1 = const$$

Чтобы решить обратную задачу, т.е. найти например$D(z)$мы должны ставить дополнительное условие. В нашем случае это влага на поверхности почвы

$$W(H\text{-}\Delta Az,t) = W_g(t), t\in[0,T].$$

Введем новую функцию

$$W(z,t) = \overline{W}(z,t)\text{-}W_x - zA(t).$$

Легко проверить, что

$$\overline{W}(0,t) = 0 \text{ и } \frac{\partial\overline{W}(H,t)}{\partial z} = 0$$

Из (2) следует равенства

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial\overline{W}(z,t)}{\partial t} - zA^{'(t)}\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial\overline{W}(z,t)}{\partial t} - A(t)$$

Найденные производные подставляем в (1). Функцию $\overline{W}(z,t)$ снова обозначим через $W\ (z\ ,t)$. Тогда получится следующая задача.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial W}{\partial z}\right) - A(t)\frac{\partial D(z)}{\partial z} + zA'(t) \qquad (3)$$

$$W(t) = 0, \quad \frac{\partial W(H,t)}{\partial t} = 0, W(z,0) = W_0(z) + W_1 + zA(0) \qquad (4)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:
$f(z,t)=zA'(t)$ и величину $W_0(z)+W_1+zA(0)$ обозначим снова через $W_0(z)$.
Задача (3)-(4) в области $Q=(0,H)x(0,T)$ при заданном $D(z)$имеет единственное устойчивое решение /5/. Методика решения обратной задачи кондуктивного распространения температуры разработана в работах /6,7/, а общая схема определения коэффициента диффузии на дифференциальном уровне изучена в работе /8/. В настоящей работе доказываются устойчивость разностных схем прямой и сопряженной задачи, построенные при определении коэффициента диффузии $D(z)$.

2. Разностные задачи.

В дискретной области ищется решение задачи

$$Q_N^m = \{z_1 = i\cdot\triangle z, t_j = j\cdot\triangle t | N\cdot\triangle_z = H; m\cdot\triangle t = T\}$$
$$Y_{\bar{t}}^{j+1} = (D(z_{i-1})Y_{\bar{t}}^{j+1})_z + A^{j+1}D_{i-} + \varphi_i^{j+1}, i = 1,2\ldots,N; j = 0,1,\ldots,m-1. \qquad (5)$$

$$Y_0^j = 0, Y_{N\bar{z}}^j = 0, Y_i^0 = W_0(z_1) \qquad (6)$$

В работе /9/ из (6)-(7) получена сопряженная задача

$$U_{\bar{t}}^{j+1} + (D_n(z_{i+1})U_{\bar{t}}^{j+1})_{\bar{z}} = 0$$
$$U_i^m = 0, U_i^j = 0, D_n(z_{N-1})U_{N,\bar{z}}^j = 2(Y_N^{j+1} - U_g(t_{j=1})) \qquad (8)$$

3. Априорные оценки.

Умножим (5) на $2Y_{\bar{t}}^{j+1}\ \triangle_z\triangle_t$ и суммируем по всем узлам сетки $Q_N^m = \{z_1 = i\cdot\triangle_z, t_j = j\cdot\triangle t | N\cdot\triangle_z = H; m\cdot\triangle t = T\}$. После применения формулы суммирования по частям получим

$$\|Y\|_{\bar{t}}^2 + 2\sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}\, Y_z\right\|^2\ \triangle_t \leq -2\sum_{i,j} A(t)\, D_i Y_{i,z} h \triangle t + 2\sum_{i,j}\varphi_i^{j+1}Y_i^{j+1}\ \triangle_z\triangle_t + \|W_0\|^2.$$

Применяя ε-неравенство Коши выводим, что

$$\|Y\|_{\bar{t}}^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DY_{\bar{x}}}\right\|^2\ \triangle_t \leq \sum_i D(z_1)\triangle z + 2\sum_{i,j} j^2\ \triangle_z\triangle_t + \sum_j \|Y\|^2 \triangle t + \|W_0\|^2.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла получим

$$\|Y\|^2 + \textstyle\sum_j \left\|\sqrt{DY_{\bar{x}}}\right\|^2\ \triangle_t \leq C_1 + \sum_i D(z_1)\triangle z \qquad (9)$$

где $C_1 = \|W_0\|^2 + \sum_{i,j}\varphi^2(z_i t_j)\triangle_z\triangle_t.$

Б) Берем разностную производную по t от (5) и умножим на $2Y_{\bar{t}}\ \triangle_z\triangle_t.$ и суммируем по i от 1 до N-1, по j от 1 до произвольного j. Тогда

$$\|\|Y_{\bar{t}}\|^2 + 2\sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}\, Y_{\bar{t}\bar{x}}\right\|^2\ \triangle_t \leq -2\sum_{i,j} A_{\bar{t}}\, D(z_i)Y_{\bar{t}\bar{z}}\triangle h \triangle t + 2\sum_{i,j}\varphi_i\ (z,t)Y_i^{j+1}\ \triangle_h\triangle_t + \left\|W_0{}^1\right\|^2.$$

Применяя ε-неравенство Коши и разностный аналог леммы Гронуолла получим

$$\|Y_{\bar{t}}\|^2 + \textstyle\sum_j \left\|\sqrt{D_{i-1}}\, Y_{\bar{z}\bar{t}}\right\|^2 \triangle t \leq C_2 + \sum_i D(z_i)\triangle z \qquad (10)$$

4. Доказательство ограниченности сверху величины $\sum_i D(z_i)\triangle z$

В работе /4/ отмечается, что на верхней границе почвы капиллярно-сорбционный потенциал принимает постоянное значение. Ввиду того, что

$$D(z) = k\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$$

Получается, что *D(H)=0*. Т.е. на границе почвы с атмосферой, коэффициент капиллярной диффузии будет равен нулю. Учитывая этот факт суммируем систему (5) от произвольного i до N-1. Тогда

$$\sum_i Y_{i,\bar{t}}^{j+1} \vartriangle z = D(z_{i-1})Y_{iz}^{j+1} + AD(z_1) + \sum_i \varphi(z_{i,} t) \vartriangle z$$

Умножаем его на) $\vartriangle t$ и суммируем по j. Из практического смысла начальных данных следует, что $0<A_0<\sum_j \left|A^j\right| \vartriangle t < \infty$. Поэтому

$$A_0 D(z_i) \le \sum_i |f(z_i, t)| \vartriangle z \vartriangle t + \sum_{i=1}^{N-1} \left|Y_i^{j+1} - Y_i^0\right| \vartriangle z + \sum_j D_n(z_i)\left|Y_{ix}^{j+1}\right| \vartriangle t.$$

Еще раз умножая на $\vartriangle z$ и суммируя по i получаем

$$A_0 T \sum_i D_n(z_i) \vartriangle z \le H \sum_{i,j} |\varphi(z,t)| \vartriangle z \vartriangle h + H\|Y\|^2 + \sum_i D_i \vartriangle z + C_3$$

или $(A_0T - 1) \sum_j D_n(z_i) \vartriangle z \le C_4$.

Время расчета T должно быть такой, чтобы $A_0T - 1>1$.Тогда

$$\sum_j D_n(z_i) \vartriangle z \le C_4. \qquad (11)$$

Неравенство $A_0T>2$ означает, что для определения коэффициента капиллярной диффузии мы должны наблюдать изучаемый участок почвы достаточно продолжительное время. Только в таком случае мы получим достоверный результат.

На основе полученной оценки из (11) выводится оценка $\|Y\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DY_{\bar{x}}}\right\|^2 \vartriangle t \le C_5$

Доказано

Теорема 1. Если $f(z,t) \in L_2(Q)$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, то для решения задачи (5)-(6) справедлива оценка

$$max\|Y\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DY_{\bar{x}}}\right\|^2 \vartriangle t + \sum_i D(z_1) \le C_5 < \infty$$

А если $f(z,t) \in L_2(0, H; W_2^1(0, T))$, $W_0(z) \in W_2^1(0,H)$, то для решения задачи (5)-(6) справедливо оценки

$$\max_j\|Y_{\bar{t}}\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DY_{\overline{zt}}}\right\|^2 + \sum_i D(z_1) \vartriangle z \le C_6 < \infty$$

Аналогично доказывается

Теорема 2. Если $f(z,t) \in L_2(0, H; W_2^1(0, T))$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, $W_g(t) \in L_2(0,T)$, то для решения задачи (7)-(8) справедливо оценка

$$\max_j\|U\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DU_{\bar{z}}}\right\| \vartriangle t \le C_7 < \infty$$

а если $f(z,t) \in W_2^1 (0, H; W_2^2(0, T))$, $W_0(z) \in W_2^1(0,H)$, $W_g(t) \in W_2^1 (0,T)$, то для решения задачи (7)-(8) справедливо оценки

$$\max_j\|U_{\bar{t}}\|^2 + \sum_j \left\|\sqrt{DU_{\overline{zt}}}\right\|^2 \le C_8 < \infty$$

На основе теоремы 1 и 2 доказывается

Теорема 3. Если $f(z,t) \in L_2(0, H; W_2^1(0, T))$, $W_0(z) \in L_2(0,H)$, $W_g(t) \in L_2(0,T)$, то решения задачи (5)-(6) и (7)-(8) являются устойчивой относительно величин *A(t), $W_0(z)$ и $W_g(t)$*

Литература:

1. Buckingham E. Studies on movement of soil moisture. U.S. Dep. Agric. Bur. Of Soils. (Washington), 1907, Bull.38.
2. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through medians – Phesics, 1931. vol. 1, p.318-333.
3. Childs E.D. The transport of water through heavy clay soils. I, III. – j.Ag.Sci., 1936, vol. 26.
4. Нерпин С.В., Юзефович Г.И. О расчете нестационарного движения влаги в почве//Докл.ВАСХНИЛ, №6, 1966.
5. Тиханов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1996, 724 с.
6. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Маханбетова Г.И. Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде//Вестник НАН РК, 2008, №1, ст. 11-13.
7. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Исмаилов А.О. Разностный метод определение коэффициента теплопроводности грунта в процессе промерзаний//Вестник НАН РК. 2008.-№2.-С. 7-9.
8. Байманкулов А.Т. Определение коэффициента диффузии почвенной воды в однородной среде.// Извествия НАН РК, 2008, №3, с.45-47.
9. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coeffusion of soi water.// International Journal of Academic Research, №5, 2010
10. Rysbaiuly B., Akishev T.B. The convergence of the iterative process for determining the coefficient of heat transfer in the soil environment// The Reports of the 3d Congress of the Word Mathematical Society of Turkic Countries, Almaty, June 30-July 4, 2009, p.54.
11. Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т. Определение термоградиентого коэффициента однородного грунта. //Математические методы геофизики, ММГ-2008, г. Новосибирск, 13-16 октября (Эл. вариант)
12. Рысбайулы Б., Акишев Т.Б. Один итерационный метод для определения коэффициента теплоемкости неоднородного грунта// Вестник НАН РК, №1, 2009, С. 3-5.
13. Рысбайулы Б., Биртаева З.Б. Сходимость итерационного процесса для определения коэффициента теплопроводности многослойного грунта с учетом конвекции влаги// ДАН НАН РК, 2010, №4, с. 37-41.
14. Рысбайулы Б., Акмолдина А.И. Приближенный метод определения коэффициента пьезопроводности пласта при упругом режиме добычи нефти//Вестник КБТУ, 2009, №1(8), ст. 58-62.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Калимолдаев М.Н.