Варшакидзе А.Н., Туганбаев У.М.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

A.N. Varshakidze, U.M. Tuganbaev

ON (ABOUT) SOME CLASSES OF INTEGRABLE FUNCTIONS

УДК: 517.926:681.3.057

При решении рациональных неопределенных интегралов, когда его числитель является производной от знаменателя, построен класс таких интегралов и определены их решения.

When solving the sound of indefinite integrals, when the numerator in derived from the denominator, was built the class of such integrals, and were identified their decisions.

В работе предлагается составление некоторых классов неопределенных интегралов, методика их решения, причем для подынтегральной функции обязательно необходимо некоторая взаимосвязь. Для написания данной статьи послужило то, что при интегрировании рациональных неопределенных интегралов, студенты часто затрудняются вычисляь интегралы, например, вида

$$\int \frac{2xsins+x^2cosx+e^x}{x^2sinx+e^x}dx. \quad (1)$$

Заметим, что числитель подынтегральной функции есть производная от знаменателя и следовательно интеграл является табличным.

1. Рассмотрим следующий неопределенный интеграл вида

$$\int \frac{p'(x)}{p^n(x)}dx = \left|{}_{dt=p'(x)dx}^{t=p(x)}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C, \text{при } n \neq 1 \quad (2)$$

где p(x) – произвольная непрерывная функция.

Таким образом, данный интеграл найдем в виде

$$\int \frac{p'(x)}{p^n(x)}dx = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{[p(x)]^{n-1}} + C, \text{при } n \neq 1 \quad (3)$$

а при n=1 следует, что

$$\int \frac{p'(x)}{p^n(x)}dx = ln|p(x)| + C. \quad (4)$$

Рассмотрим примеры

1. $\int \frac{cosx}{sinx}dx = ln|sinx| + C,$ 2. $\int \frac{1}{xlnx}dx = ln|lnx| + C,$
3. $\int \frac{cosx}{sinx}dx = -\frac{1}{4sin^4x} + C,$ 4. $\int \frac{arcsinx}{(\sqrt{1-x^2})^3}dx = \frac{1}{2(1-x^2)} + C.$

II. Усложним рассмотренный неопределенный интеграл вида (1)

$$\int \frac{p'(ax)}{p^n(ax)}dx = \left|{}_{dt=ap'(ax)dx}^{t=p(ax)}\right| = \int \frac{t^{-n}}{a}dt = \frac{1}{a(1-n)}\cdot\frac{1}{t^{n-1}} + C,$$

тогда $\int \frac{p'(ax)}{p^n(ax)}dx = \frac{1}{a(1-n)p^{n-1}(ax)} + C,$ когда $n \neq 1.$ (5)

Если n=1, то рассматриваемый интеграл решается так

$$\int \frac{p'(ax)}{p(ax)}dx = \frac{1}{a}ln|p(ax)| + C. \quad (6)$$

Приведем примеры:

$$1. \int \frac{bdx}{(a+bx)} = ln|a+bx| + C, \qquad 2. \int \frac{acosax}{sin^2ax}dx = \frac{1}{sinax} + C.$$

III. Рассмотрим теперь следующий интеграл

$$\int p^n(ax)\cdot p'(ax)dx = \left|_{dt=ap'(ax)dx}^{t=p(ax)}\right| = \int \frac{t^n}{a}dt = \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

С учетом рассмотренного интеграла, имеем

$$\int p^n(ax)\cdot p'(ax)dx = \frac{p^{n+1}(ax)}{a\cdot(n+1)} + C, \text{если } n \neq -1 \tag{7}$$

Если n=-1, то интеграл такого рода рассмотрен в выражении (6). Примерами служат такие выражения:

$$1. \int cos^6 9x \cdot sin9xdx = \frac{cos^7 9x}{63} + C;$$

$$2. \int \frac{2x}{1+x^2}dx = ln|1+x^2| + C;$$

$$3. \int \frac{5e^{5x}}{2+e^{5x}}dx = ln|2+e^{5x}| + C.$$

IV. Теперь рассмотрим более сложный неопределенный интеграл

$$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bg'(bx)\cdot p(ax)}{[p(ax)\cdot g(bx)]^n}dx = \left|_{dt=ap'(ax)g(bx)+bg'(bx)p(ax)dx}^{t=p(ax)g(bx)}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} + C \tag{8}$$

Таким образом, при n≠1 имеем

$$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bg'(bx)\cdot p(ax)}{[p(ax)\cdot g(bx)]^n}dx = \frac{1}{(1-n)[p(ax)g(bx)]^{n-1}} + C.$$

В случае, когда n=1, получим

$$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bg'(bx)\cdot p(ax)}{[p(ax)\cdot g(bx)]^n}dx = \ln|p(ax)g(bx)| + C. \tag{9}$$

Рассмотрим несколько примеров вида (8):

$$1. \int \frac{[2cos2x + 3sin2x]e^{3x}}{[sin2x\cdot e^{3x}]^4}dx = \frac{1}{3[sin2x\cdot e^{3x}]^3} + C;$$

$$2. \int \frac{-3sin3x(2+7x)+7cos3x}{cos3x\cdot(2+7x)}dx = \ln|(2+7x)\,cos3x| + C.$$

$$3. \int \frac{-4cos4x\cdot e^{5x} + 5sin4x\cdot e^{5x}}{sin4x\cdot e^{5x}}dx = \ln|sin4x\cdot e^{5x}| + C.$$

V. Возьмем теперь другой интеграл

$$\int \frac{ap'(ax)+bg'(bx)}{[p(ax)\cdot g(bx)]^n}dx = \left|dt =_{[ap'(ax)+bg'(bx)]dx}^{t=p(ax)+g(bx)}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{(1-n)t^{n-1}} + C, \tag{10}$$

т.е. при n≠1, а при n=1 получим

$$\int \frac{ap'(ax)+bg'(bx)}{[p(ax)\cdot g(bx)]^n}dx = \left|dt =_{[ap'(ax)+bg'(bx)]dx}^{t=p(ax)+g(bx)}\right| = ln|p(ax)+g(bx)| + C. \tag{11}$$

Рассмотрим несколько примеров, аналогичных (10):

$$1. \quad \int \frac{2x^{2x}-\pi\sin\pi x}{e^{2x}+\cos\pi x}dx = ln|e^{2x}+\cos\pi x| + C;$$

$$2. \int \frac{3a^{3x}\,ln3x + a^2\,cos\,a^2x}{[a^{3x}+\sin a^2x]^2}dx = -\frac{1}{a^{3x}+\sin a^2x} + C;$$

$$3. \int \frac{3\cos 6\,x + \;31n^2\,{}^{x}/_{x}}{[sin^2 3x + ln^3 x]^3}dx = -\frac{1}{-2(\sin 3x + ln^3 x)^2} + C.$$

VI. Рассмотрим неопределенный интеграл вида

$$\int [p(ax)+\mathrm{g}(bx)]^n\,[ap'(ax)+bg'(bx)]dx = \left|_{dt=[ap'(ax)+bg'p(ax)]dx}^{t=p(ax)+g(bx)}\right| = \int t^n\,dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}+C$$

т.е. $\int [p(ax)+g(bx)]^n\,[ap'(ax)+bg'(bx)]dx = \frac{1}{n+1}[p(ax)+g(bx)]^{n+1}+C$ (12)

при n≠–1, а при n=–1 решение имеет вид (11)

Аналогичными примерами выражения (12) будет:

$$1.\ \int (x^2+e^x)^3\,(2x+e^x)dx = \frac{(x^2+e^x)^4}{4}+C$$

$$2.\int \frac{(a^x+tgx)^2(a^x lnacos^2x+1)}{cos^2x}dx = \frac{(a^x+tgx)^3}{3}+C$$

VII. Рассмотрим еще один вид интеграла

$$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bp(ax)\cdot g'(bx)+cq(cx)}{[p(ax)\cdot g(bx)+q(cx)]^n}dx = \left|\begin{matrix} t=p(ax)g(bx)+q(cx) \\ dt=[ap'(ax)g(bx)+bp(ax)\cdot g'(bx)+cq(cx)]dx\end{matrix}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{t^{n-1}}+C.$$

С учетом этого, данный интеграл примет вид

$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bp(ax)\cdot g'(bx)+cq(cx)}{[p(ax)\cdot g(bx)+q(cx)]^n}dx = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{[p(ax)g(bx)+q(cx)]^{n-1}}+C,$ (13)

когда n≠1. В случае, когда n=1 получим другое выражение

$\int \frac{ap'(ax)g(bx)+bp(ax)\cdot g'(bx)+cq(cx)}{[p(ax)\cdot g(bx)+q(cx)]}dx = ln|p(ax)g(bx)+q(cx)|+C.$ (14)

Для такого рода интеграла, приведем другие интегралы:

$$1.\int \frac{x^2e^x(3+x)+2cos2x}{(x^3e^x+sin2x)^2}dx = -\frac{1}{x^3e^x+sin2x}+C;$$

$$2.\int \frac{xe^x(cosx+sinx)+1}{x(e^xcosx+lnx)}dx = -ln|e^xcosx+lnx|+C.$$

Здесь мы указали классы интегрируемых функций, которые «берутся» сразу приведением его к одному из табличных интегралов.

Таким образом, сейчас мы можем указать решение неопределенного интеграла (1), которые относятся к VII классу интегрируемых функций. Действительно,

$$\int \frac{2xsinx+x^2cosx+e^x}{x^2sinx+e^x}dx = \left|\begin{matrix} t=x^2sinx+e^x \\ dt=[2xsinx+x^2cosx+e^x]dx\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t} = lnt|x^2sinx+e^x|+C,$$

т.е. решение данного интеграла не составляет собой трудности.

Данная работа полезна для предподавателей при составлении неопределенных интегралов для модульных работ.

Литература:

1. Никольский С.М. Курс математического анализа, т.I,II. М., 1973 г.
2. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т. V, М.. Физматгиз, 1959 г.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., Наука, 1988 г.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Божокоев М.Б.