Жумалиев Т.Ж.

О КАРДИНАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ИНИЦИАЛЬНЫХ РАВНОМЕРНОСТЕЙ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

T.Zh. Zhumaliev

ABOUT CARDINAL INVARIANTS AN INITIAL UNIFORMITY OF UNIFORM SPACE

УДК: 515-12

В этой статье рассматриваются, произведения любого множества известных кардинальных инвариантов равномерных пространств (вес, квазивес и псевдовес).

In this article considers multiplies any a number of, many it is known cardinal invariants regular spaces.

В начале, напомним некоторые понятия и определения из теории множеств общей топологии и кардинальные инварианты равномерных пространств.

Пусть (X, U) – произвольное равномерное пространство.

Семейство B⊆U называется **базой** равномерности U, если для любого $\alpha \in U$ существует такое $\beta \in B$ что β вписано в α [6].

Наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью какой-либо базы равномерности U, называется весом равномерности U и обозначается ω(U) [6].

Система $\sum$ покрытий множества X называется **направленной** [6], если для любых двух покрытий α, β $\in \sum$ существует такое покрытие $\gamma \in \sum$, что покрытие γ вписано в покрытие α ⋀ β.

Определение [6]. Пусть (X, U) – равномерное пространство. Направленная система $\sum$ покрытий множества X, называется квазибазой равномерного пространства или равномерности U, если выполняется следующее условие:

(КБ) Нормальная последовательность $\{a_n\}$ покрытий множества X содержится в равномерности U тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\sigma_n\}$ покрытий из системы $\sum$ такая, что покрытие σ_n вписано в покрытие α_n для каждого $n \in N$.

Наименьшее кардинальное число τ, являющееся мощностью какой-либо квазибазы равномерного пространства (X,U), называется **квазивесом** и обозначается и обозначается qω(U) или qω(X, U) [6].

Всякая база равномерного пространства (X, U) является его квазиюазой, обратное, вообще говоря, неверно.

Определение [6]. Пусть (X, U) – равномерное пространство. Система P⊆U называется псевдобазой равномерного пространства (X, U) или равномерности U, если ∩{β(x):β∈ P}={x} для любой точки x ∈ X.

Наименьший кардинал вида |P|, где P – псевдобаза для равномерности U_1 называется **псевдовесом** равномерного пространства и обозначается pω(U) или pω (X, U) [6].

Всякая база равномерности U является ее псевдобазой. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пусть X не пустое множество, а $\{(X_m, U_m):m\in M\}$- произвольное семейство равномерных пространств и $f_m:X\to(X_m,U_m)$- произвольные отображения пространство X в семейство$\{(X_m, U_m):m\in M\}$ – равномерных пространств.

Хорошо известно [4], что на X, существует равномерность U являющееся наименьшей из всех равномерностей V, делающей каждое отображение $f_m:(X,V)\to(X_m,U_m)$- равномерно непрерывным.

Эта равномерность U называется **инициальной равномерностью** [4] на X, а равномерное пространство (X,U) называется **инициальным равномерным пространством** относительно семейства $\{(X_m, U_m):m\in M\}$ – равномерных пространств.

Пусть τ – произвольное кардинальное число, а μ=|M|.

Теорема 1. Пусть (X,U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства $\{(X_m, U_m):m\in M\}$ – равномерных пространств. Если $\omega(X_m, U_m)\leq\tau$ для любого $m\in M$, то ω(X, U)≤ max {τ,μ}.

Доказательство. Пусть (X,U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства $\{(X_m, U_m):m\in M\}$- равномерных пространств и пусть $\omega(X_m, U_m)\leq\tau$ для любого $m\in M$. Тогда инициальную равномерность U [4], можно определить следующим образом.

Так, как $\omega(X_m, U_m)\leq\tau$ для любого $m\in M$, то существует база $B_m\subseteq U_m$, что $|B_m| = \omega(U_m)$. Положим, $A_m = \{f_m^{-1}\beta_m : \beta_m \in B_m\}$ для любого $m\in M$. Пусть A=U $\{A_m : m\in M\}$. Через A_0 обозначим множество всех конечных пересечений покрытий из A. Тогда A_0 является базой инициальной равномерностью U и |A| ≤ max{τ,μ}. Следовательно, ω(X, U) ≤ max{τ,μ}.

Следствие 1. Произведение любого множества равномерных пространств, имеющих такие B_m – базы, что $|B_m| = \omega(U_m)$ для каждого $m\in M$, является равномерным пространством имеющего B – базу, что |B| = ω (max{τ,μ}).

Теорема 2. Пусть (X, U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства

$\{(X_m, U_m): m\in M\}$ – равномерных пространств. Если $q\omega(X, U) \le \tau$ для любого $m\in M$, то $q\omega(X, U) \le \max\{\tau,\mu\}$.

Доказательство. Пусть (X, U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства $\{(X_m, U_m): m\in M\}$ – равномерных пространств и пусть $q\omega(X_m, U_m) \le \tau$ для любого $m\in M$. Тогда инициальную равномерность U [4], можно определить следующим образом.

Так, как $q\omega(X_m, U_m) \le \tau$ для любого $m\in M$, то существует квазибаза $\sum_m \subseteq U_m$ такая, что нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X_m содержится в равномерности U_m тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\sigma_n\}$ покрытий из системы $\sum_m$ такая, что покрытие σ_n вписано в покрытие α_n для каждого $n\in$ N и $|\sum_m| = \partial\omega(U_m)$. Положим, $W_m = \{f_m^{-1}(\sigma_n > \alpha_n): \alpha_n \in \sum_m, \sigma_n \in X_m\}$ для любого $m\in M$ и пусть $W=\cup\{W_m: m\in M\}$. Через W_0 являеется квазибазой инициальной равномерностью U такая, что нормальная последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X содержится в равномерности U тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\sigma_n\}$ покрытий из системы W_0 такая, что покрытие σ_n вписано в покрытин α_n для каждого $n\in N$ и $|W_0| = q\omega(\max\{\tau,\mu\})$. Следовательно, $q\omega(X, U) \le \max\{\tau,\mu\}$.

Следствие 2. Произведение любого множества равномерных пространств, имеющие такие Σ_m – квазибазы, что $|\Sigma_m| = q\omega(U_m)$ для каждого $m\in M$, является равномерным пространством имеющего Σ – квазибазу, что $|\Sigma| = q\omega(\max\{\tau,\mu\})$.

Теорема 3. Пусть (X, U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства $\{(X_m, U_m): m\in M\}$ – равномерных пространств. Если $p\omega(X_m, U_m) \le \tau$ для любого $m\in M$, то $p\omega(X, U) \le \max\{\tau,\mu\}$.

Доказательство. Пусть (X, U) – инициальное равномерное пространство, относительно семейства $\{(X_m, U_m): m\in M\}$ – равномерных пространств и пусть $p\omega(X_m, U_m) \le \tau$ для любого $m\in M$. Тогда определим инициальную равномерность U [4].

Если $p\omega(X_m, U_m) \le \tau$ для любого $m\in M$, то существует такая база $P_m \subseteq U_m$, что $|P_m| = p\omega(U_m)$. Положим, $V_m = \{f_m^{-1}Y_m \in P_m\}$ для любого $m\in M$. Пусть $V = \cup\{V_m: m \in M\}$. Через V_0 обозначим множество всех конечных пересечений покрытий из V. Тогда V_0 является базой инициальной равномерностью U и $|V| \le \max\{\tau,\mu\}$.

Следствие 3. Произведение любого множества равномерных пространств, имеющие такие P_m – псевдобазы, что $|P_m| = p\omega(U_m)$ для каждого $m\in M$, является равномерным пространством имеющего P – псевдобазу, что $|P| = p\omega(\max\{\tau,\mu\})$.

Литература:

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – Москва: Наука, 1977.
2. Александров П.С., Пасынков Б.А. Ведение в теорию размерности. – Москва: Наука, 1973.
3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упраждениях. – Москва: Наука, 1974.
4. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. – Москва: Наука, 1968.
5. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. - Москва: Наука, 1969.
6. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
7. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные пространства. – Бишкек: Учкун, 2003.
8. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах. – Бишкек: Изд. Центр при КГПУ им. И.Арабаева, 1997.
9. Энгелькинг Р. Общая топология. – Москва: Мир, 1986.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Туганбаев У.М.