Шарапов С.

ТОПОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ УРОВНЯ

S. Sharapov

TOPOLOGY OF SURFACES OF LEVEL

УДК: 513.8

В данной работе доказывается, что при выполнении некоторого условия поверхность уровня гладкой функции без критических точек является односвязным многообразием.

In this paper it is proved that level surface of the differentiable function under some condition will be simple connected manifold.

Поверхности уровня являются самыми простыми примерами поверхностей с точки зрения локальной геометрии, которая изучается в курсе дифференциальной геометрии. Нелокальная геометрия поверхностей уровня, т.е.изучение геометрии «в целом» является достаточно сложной задачей. Изучению нелокальной геометрии поверхностей уровня посвящены работы [1],[2],[3],[4]. В данной работе изучается вопрос о линейной связности поверхностей уровня функций без критических точек. Доказывается,что при выполении некоторого условия поверхности уровня являются односвязными.

Теорема *Пусть M - гладкое односвязное полное риманово многообразие, $f : M \to R^1$ функция без критических точек. Если $|gradf(x)| > a > 0$ для каждой точки $x \in M$, то поверхности уровня являются взаимно диффеоморфными односвязными некомпактными подмногообразиями.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого значения $c_0 \in R^1$ функции f множество уровня $L_{c_0} = \{x \in M : f(x) = c_0\}$ не является линейно, связным, т.е. оно имеет несколько компонентов линейной связности.

Обозначим через L^1 одну из компонент линейной связности множество L_{c_0} и положим $L^2 = L_{c_0} - L^1$.

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x), x \in M , \quad (1)$$

где $X(x) = \dfrac{gradf(x)}{|gradf(x)|}$ и решение этой системы с начальным условием $x(0) = x_0$ обозначим через $\varphi(t, x_0)$. В силу того, что $X \in C^1(M, R\ )$ через каждую точку $x_0 \in M$ проходит единственная траектория системы (1). Траектория этой системы называется градиентной линией функции f.

Обозначим через U^i множество всех точек y для которых существуют $t \in R$, и точка $p \in L^i$, такие что $y = \varphi(t, p)$, где $i = 1,2$. Так как $L^i \subset U^i$, множества U^i являются не пустыми.

Покажем, что эти множества являются открытыми подмножествами M .

Пусть $y_0 \in U^i$ и $y_0 = \varphi(t, x_0)$, где $x_0 \in L^i$, $f(x_0) = c$, t_0-некоторое действительное число. Пусть $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ локальная система координат в некоторой окрестности точки x_0 и $x_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^{n-1})$. Не ограничивая общности, предположим, что $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$. По теореме о неявной функции существуют положительные числа δ, ε и дифференцируемая функция $x^n = \varphi(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, c)$, определенная в области $\Pi_\delta = \{(x^1, x^2, ..., x^{n-1}) : |x_0^i - x^i| < \delta, i = 1,2,...,n-1\}$, что точками

$$(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, \varphi(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, c))$$

исчерпываются все точки области

$$\Pi_{\delta,\varepsilon} = \{(x^1, x^2, ..., x^{n-1}, x^n) : (x^1, x^2, ..., x^{n-1}) \in \Pi_\delta, |x_0^n - x^n| < \varepsilon\},$$

лежащие на поверхности $f(x) = c$. По теореме о непрерывной зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных [5], если δ достаточно мало, то решение $\varphi(t, x)$ определено для всех $x \in L_{c_0} \cap \Pi_{\delta,\varepsilon}$. По теореме существования решения системы дифференциальных уравнений для каждой точки $x \in L_{c_0} \cap \Pi_{\delta,\varepsilon}$ существует положительное число ε_x такое, что для каждого $t \in (t_0 - \varepsilon_x, t_0 + \varepsilon_x)$ определена функция $\varphi(t, x)$.

Теперь, если положим

$$V^i(y_0) = \{\varphi(t, x) : x \in \Pi_{\delta,\varepsilon} \cap L_{c_0}, t \in (t_0 - \varepsilon_x, t_0 + \varepsilon_x)\},$$

то ясно, что $V^i(y_0)$ являются окрестностью точки y_0, содержащаяся в U^i. Следовательно, U^i открыто.

Покажем, что $M = U^1 \cup U^2$. Для этого рассмотрим произвольную точку $z \in M$, для которой $f(z) = c_1$. Для определенности будем считать, что $c_1 < c_0$.

Положим $h(t) = f(\varphi(t, z))$, где $\varphi(t, z)$ решение системы (1) с начальным условием $\varphi(0) = z$. Так как $X(x) = 1$ и многообразие M является полным, решение $\varphi(t, z)$ определено для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ [5]. Ясно что

$$h(0) = c_1, \frac{dh(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \frac{f_{x_i}}{|gradf(x)|} = |gradf(\varphi(t, z))| \geq a > 0$$

для всех t, где $f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial f_{x_i}}$. Следовательно, функция $h(t)$ при некотором t^0 примет значение c_1.Тогда $\varphi(-t^0, x) = z$, где $x = \varphi(t^0, z) \in L_{C_0}$.Это означает, что имеет место равенство $M = U^1 \cup U^2$.

Тепер отметим, что функция $h(t)$ монотонна возрастает, и каждое значение принимает только один раз. Из этого факта и в силу единственности решений системы (1) имеет место $U^1 \cap U^2 = \varnothing$. Это эквивалентно тому, что M не связно. Это противоречие показывает, что L_{c_0} линейно связно и следовательно, поверхность L_{c_0} имеет только одну компоненту связности.

Теперь покажем,что M диффеомофно прямому произведению $L \times R^1$, где L - произвольная поверхность уровня функции f.Повыше доказанному для каждой точки $y \in M$ существует $t \in R$, и точка $p \in L$, такие что $y = \varphi(t, p)$. Поэтому возникает отображение

$$F : M \to L \times R^1,$$

при котором $F(y) = (p, t)$, где $p \in L$, $t \in R^1$.

Покажем, что отображение F является диффеоморфизмом. В силу единственности решения системы и в силу того, что каждая градиентная линия пересекает поверхность уровня L один раз, отображение F является взаимно однозначным.

Рассмотрим произвольную точку $y \in M$, для которой $F(y)=(p,t)$.Тогда $\gamma(-t,y)=p$. По теореме о гладкой зависимости решения системы дифференциальных уравнений от начальных данных отображение F дифферен-цируемо [5].Отсюда следует, что отображение F является диффеоморфизом.

Так как многообразие M односязно,оно имеет тривиальную фундамен-тальную группу. В силу того оно диффеоморфно прямому произведению $L \times R^1$, поверхность уровня L является односвязным.

Некомпактность поверхности уровня следует из результатов работы [2].

Теорема доказана.

Литература:

1. Каипназарова Г. , Нарманов А.Я. Топология слоений, порожденных поверх-ностями уровня.Узбекский математический журнал. Ташкент, 2008, №2, С. 53-60.
2. Шарапов С. Геометрия поверхностей уровня. Известия ВУЗов. Бишкек, 2009, №1,стр.11-13.
3. Нарманов А., Шарапов С. О поверхностях уровня субмерсий. Узбекский матем. журнал. Ташкент, 2004.№2. С. 62-66.
4. Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds, Springer-Verlag, 1988.
5. Бибиков Ю. Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ленинград, ЛГУ, 1981 г.

Рецензент: к.ф.-м.н. Мураталиева В.Т.