

Койшыбаева Ж.Б.

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ НАПРАВЛЯЮЩИХ
МЕХАНИЗМОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ В СЛУЧАЕ
ЗАДАННОГО ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ ШАТУННОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ**

Zh.B. Koishybaeva

**ANALYTICAL SYNTHESIS OF DIRECTING MECHANISMS
WITH USE OF NUMBERS ФУРЬЕ IN CASE OF THE SET LAW OF MOVEMENT
ШАТУННОЙ OF THE POINT ON THE PLANE**

УДК: 667.5/669.25

В данной статье приводится аналитический синтез направляющих механизмов с использованием рядов Фурье в случае заданного закона движения шатунной точки на плоскости.

In given article analytical synthesis of directing mechanisms with use of numbers Fure in case of the set law of movement шатунной points on a plane is resulted.

Рассмотрим задачу синтеза направляющего механизма в случае, когда требуется не просто воспроизведение заданной кривой, но и заданного закона движения шатунной точки вдоль кривой. В этом случае требуется синтезировать механизм, координаты чертящей точки которого изменяются по заданному закону в зависимости от обобщенной координаты механизма

$$\vec{R} = \vec{R}(q) \quad (1)$$

т.е. в качестве параметра кривой выступает угол поворота кривошипа $q = \varphi$.

Отклонение фактического движения от программного имеет вид

$$\vec{\Delta} = \vec{R}_P(\varphi) - \left[\vec{S} + \Gamma(\alpha, j) \left(\vec{R}^*(\varphi + \phi) - \vec{a}_0^* \right) \right] \quad (2)$$

где $\vec{R}_P(\varphi)$ - радиус-вектор шатунной точки P , ϕ - фазовый сдвиг.

Здесь мы выполнили преобразование сдвига (\vec{S}) , поворота (α) и растяжения-сжатия (j) по отношению к исходной кривой γ^* (вместо шатунной кривой механизма γ). Это сделано для удобства дальнейших преобразований, а обратный переход не составляет большой сложности. Для этого достаточно записать отклонение в виде

$$\vec{\Delta} = -\Gamma(\alpha, j) \vec{\Delta}_1, \quad (3)$$

где

$$\vec{\Delta}_1 = \vec{R}^* - \vec{a}_0^* - \Gamma\left(-\alpha, \frac{1}{j}\right) (\vec{R} - \vec{S}) \quad (4)$$

Пусть $\vec{r}_P = [x_P, y_P]^T$ - локальный радиус-вектор шатунной точки в системе координат Ox, Oy жестко связанной с шатунной плоскостью (рисунок 29). Движение шатунной плоскости Ox, Oy определяется через координаты $x_0(\varphi), y_0(\varphi)$ начала системы координат и направляющие косинусы $\vec{e}_\theta [\cos \theta, \sin \theta]^T$, где θ - угол поворота оси относительно оси Ox .

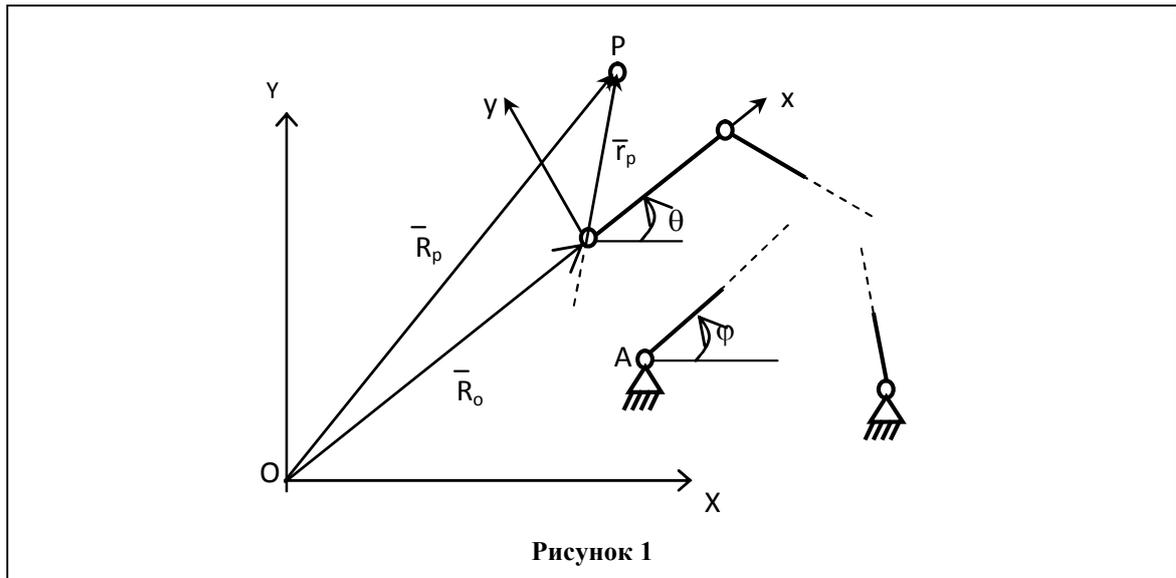


Рисунок 1

Тогда радиус-вектор \vec{R}_p шатунной точки P выражается следующим образом

$$\vec{R}_p = \vec{R}_0(\varphi) + \Gamma_1(\theta(\varphi)) \vec{r}_p \quad (5)$$

где $\Gamma_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

Векторы $\vec{R}_0(\varphi)$ и $\vec{e}_\theta(\varphi)$ разложим в ряд Фурье

$$\vec{R}_0(\varphi) = \vec{a}_0 + \sum \vec{a}_k \cos k\varphi + \vec{b}_k \sin k\varphi \quad (6)$$

$$\vec{e}_\theta(\varphi) = \vec{c}_0 + \sum \vec{c}_k \cos k\varphi + \vec{d}_k \sin k\varphi \quad (7)$$

Тогда, с учетом выражения

$$\Gamma_1(\theta) \vec{r}_p = \Gamma_2(x_p, y_p) \vec{e}_\theta$$

где

$$\Gamma_2(x, y) = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix},$$

разложение в ряд Фурье вектора \vec{R}_p имеет вид

$$\vec{R}_p(\varphi, x, y) = \vec{g}_0(x, y) + \sum (\vec{g}_k(x, y) \cos kt + \vec{h}_k(x, y) \sin kt), \quad (8)$$

где $\vec{g}_k(x, y) = \vec{a}_k + \Gamma_2(x, y) \vec{c}_k$, $\vec{h}_k(x, y) = \vec{b}_k + \Gamma_2(x, y) \vec{d}_k$.

А выражение для $(\vec{R}^*(\varphi + \phi) - \vec{a}_0^*)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{R}^*(\varphi + \phi) - \vec{a}_0^* &= \sum_{k=1}^{\infty} (\vec{a}_k^* \cos k(\varphi + \phi) + \vec{b}_k^* \sin k(\varphi + \phi)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\vec{a}_k^* \cos k\varphi \cos k\phi - \vec{a}_k^* \sin k\varphi \sin k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\varphi \cos k\phi + \vec{b}_k^* \cos k\varphi \sin k\phi) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\vec{g}_k^* \cos k\varphi + \vec{h}_k^* \sin k\varphi \right),$$

где $\vec{g}_k^* = \vec{a}_k^* \cos k\varphi + \vec{b}_k^* \sin k\varphi$, $\vec{h}_k^* = -\vec{a}_k^* \sin k\varphi + \vec{b}_k^* \cos k\varphi$.

Целевая функция, которую необходимо минимизировать

$$Z(\alpha, f, \phi, x, y, S_x, S_y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^{-2} d\varphi \Rightarrow \min \quad (9)$$

С учетом выражения для \vec{R}_p

$$Z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\vec{g}_0(x, y) + \sum_1^{\infty} \left(\vec{g}_k(x, y) \cos kt + \vec{h}_k(x, y) \sin kt \right) \right]^{-\vec{S}} - \Gamma(\alpha, j) \sum_1^{\infty} \left(\vec{g}_k^* \cos k\varphi + \vec{h}_k^* \sin k\varphi \right) \right]^2 d\varphi \quad (10)$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\vec{A}_0 + \sum_1^{\infty} \left(\vec{A}_k \cos kt + \vec{B}_k \sin kt \right) \right)^2 dt = \vec{A}_0^2 + \sum_1^{\infty} \left(\vec{A}_k^2 + \vec{B}_k^2 \right) \quad (11)$$

И тогда выражение для целевой функции с учетом m членов ряда Фурье будет иметь вид

$$Z_m = \left(\vec{g}_0(x, y) - \vec{S} \right)^2 + \sum_{k=1}^m \left[\left(\vec{g}_k(x, y) - \Gamma(\alpha, j) \vec{g}_k^* \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^m \left[\left(\vec{h}_k(x, y) - \Gamma(\alpha, j) \vec{h}_k^* \right)^2 \right] \quad (12)$$

Из необходимого условия минимума функции Z_m , приравняв нуль, частные производные по искомым переменным

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = f \cos \alpha, x_4 = f \sin \alpha, x_5 = S_x, x_6 = S_y \text{ и } x_7 = \phi,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial Z_m}{\partial x_1} &\equiv \vec{c}_0^2 x_1 - c_{0x} x_5 - c_{0y} x_6 + \vec{a}_0^T \vec{c}_0 + \sum_{k=1}^m \left[\left(\vec{c}_k^2 + \vec{d}_k^2 \right) x_1 - \right. \\ &- \left(\vec{c}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_3 + \\ &+ \left(\vec{c}_k^T \Gamma \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \Gamma \left(\frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_4 + \\ &+ \left. \vec{a}_k^T \vec{c}_k + \vec{b}_k^T \vec{d}_k \right] = 0; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial Z_m}{\partial x_2} &\equiv \vec{c}_0^2 x_2 + c_{0y} x_5 - c_{0x} x_6 + \vec{a}_0^T \Gamma \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \vec{c}_0 + \sum_{k=1}^m \left[\left(\vec{c}_k^2 + \vec{d}_k^2 \right) x_2 + \right. \\ &+ \left(\vec{c}_k^T \Gamma \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \Gamma \left(-\frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_3 + \\ &+ \left. \left(\vec{c}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_4 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \vec{a}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{c}_k + \vec{b}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{d}_k \Big] = 0; \\
 & \frac{1}{2} \frac{\partial z_m}{\partial x_3} \equiv \sum_{k=1}^m \left[-\vec{c}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right] x_1 + \\
 & + \left(\vec{c}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_2 + \\
 & + \left(\left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right)^2 + \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right)^2 \right) x_3 - \\
 & - \vec{a}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) - \vec{b}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \Big] = 0; \\
 & \frac{1}{2} \frac{\partial z_m}{\partial x_4} \equiv \sum_{k=1}^m \left[\vec{c}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right] x_1 - \\
 & - \left(\vec{c}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{d}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right) x_2 + \\
 & + \left(\left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right)^2 + \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right)^2 \right) x_4 + \\
 & + \vec{a}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{b}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \Big] = 0; \\
 & \frac{1}{2} \frac{\partial z_m}{\partial x_5} \equiv -c_{0x} x_1 + c_{0y} x_2 + x_5 - a_{0x} = 0; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial z_m}{\partial x_6} \equiv -c_{0y} x_1 - c_{0x} x_2 + x_6 - a_{0y} = 0
 \end{aligned}$$

Откуда получим систему линейных уравнений для определяемых переменных $\vec{X}_1 = [x, y, f \cos \alpha, f \sin \alpha, S_x, S_y]^T$,

$$A(\phi) \cdot \vec{X}_1 = \vec{b}_1(\phi) \tag{13}$$

Правая часть уравнения (3.13) имеет вид

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{a}_0^T \vec{c}_0 + \sum_{k=1}^n \left[\vec{a}_k^T \vec{c}_k + \vec{b}_k^T \vec{d}_k \right] \\ \vec{a}_0^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{c}_0 + \sum_{k=1}^m \left[\vec{a}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{c}_k + \vec{b}_k^T \Gamma\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{d}_k \right] \\ \sum_{k=1}^m \left[\vec{a}_k^T \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) - \vec{b}_k^T \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right] \\ \sum_{k=1}^m \left[\vec{a}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\vec{a}_k^* \cos k\theta + \vec{b}_k^* \sin k\theta \right) + \vec{b}_k^T \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\vec{a}_k^* \sin k\theta + \vec{b}_k^* \cos k\theta \right) \right] \\ -a_{0x} \\ -a_{0y} \end{bmatrix}$$

Таким образом, в базе данных механизмов достаточно хранить m коэффициентов Фурье $a_0, \vec{a}_k, \vec{b}_k, c_0, \vec{c}_k, \vec{d}_k$ задающие движение шатунной плоскости Oxy . 6 переменных определяются теперь аналитически из решения системы линейных уравнений, остается лишь найти единственную переменную $x_7 = \phi$ точку минимума модифицированной целевой функции, которая есть сложная функция вида

$$Z_{m_1}(\phi) = Z_m(\vec{X}_1(\phi), \phi),$$

где $\vec{X}_1(\phi) = A^{-1}(\phi) \vec{b}(\phi)$ - решение уравнений (13).

В результате минимизируется функция, зависящая от одной переменной ϕ вместо семи переменных, а также увеличивается скорость вычислений. Эффективность методики особенно проявляется в случае механизмов высоких классов, поскольку использование коэффициентов Фурье позволяет избежать трудоемкого кинематического анализа на каждом шаге спуска к минимуму.

Литература:

1. LUCK K, MODLER K.-H. Getriebetechnik: Analyse, Synthese, Optimierung. 2. Auflage. – Springer Verlag, 1995. – 367 s.
2. ОЗОЛ О.Г. Теория механизмов и машин: пер. с латыш. – М.: Наука, 1984. -43 с.
3. САРКИСЯН Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов. - М.: Наука, 1982. -304 с.
4. ЛЕВИТСКИЙ Н.И. Приближенный синтез шарнирных механизмов с двумя степенями свободы. – Труды ИМАШ АН СССР. Семинар по ТММ. Вып. 83-84. -М.:Изд.-во АН СССР, 1961. –Том 21. -с. 103-113.

Рецензент: д.т.н., профессор Жанбыров Ж.Г.
