# МАТЕМАТИКА

*Намазова Г.О.*

## О СУЩЕСТВОВАНИИ $z_u$ – УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

*G.O. Namazova*

## EXISTENCE OF $z_u$ – ULTRAFILTERS

*УДК: 515. 123.*

*Доказывается существование* $z_u -$ *ультрафильтров.*

*Existance of* $z_u -$ *ultrafiltres is proved.*

В данной работе демонстрируется процедура построения максимальных центрированных систем, состоящих из равномерно замкнутых (нуль – множеств) $([3-5])$, которые существуют в силу принципа максимальности Куратовского – Цорна $([2])$. Множество $C^*(uX)$ всех равномерно непрерывных ограниченных функций равномерного пространства $uX$ $([1],[5],[8])$ относительно поточечного сложения и поточечного умножения образует коммутативное кольцо с единицей, где роль единицы играет тождественно равная $1 \in \mathrm{R}$ функция, т.е. $f(x) \equiv 1$ для любых $x \in X$ и кольцевые операции определяются как: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для любого $f, g \in C^*(uX)$ и $x \in X$.

Множество $f^{-1}(0) \subseteq X$, где $f \in C^*(uX)$ называется *равномерно нуль – множеством* и обозначается как $\boldsymbol{Z}(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Символ $\boldsymbol{Z}$ можно трактовать, как отображение кольца $C^*(uX)$ на множество всех равномерно нуль – множеств равномерного пространства $uX$. Итак, $\boldsymbol{Z} : C^*(uX) \to \mathsf{Z}(uX)$ и $\boldsymbol{Z}(f) \in \mathsf{Z}(uX)$ для любого $f \in C^*(uX)$.

Ясно, что $\boldsymbol{Z}(f) = \boldsymbol{Z}\left(|f|\right) = \boldsymbol{Z}(f^n)$ для всех $n \in \mathrm{N}$, $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{0}) = X$, где $\boldsymbol{0}(x) \equiv 0$ для любого $x \in X$ и $\boldsymbol{Z}(1) = \varnothing$. Также имеем $\boldsymbol{Z}(fg) = \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(g)$ и $\boldsymbol{Z}\left(f^2 + g^2\right) = \boldsymbol{Z}\left(|f| + |g|\right) = \boldsymbol{Z}(f) \cap \boldsymbol{Z}(g)$.

Дополнения до равномерно нуль – множеств называются *равномерно конуль – множествами* и, если $U$ - равномерно конуль – множество, тогда $X \setminus U \in \mathsf{Z}(uX)$, т.е. существует такая функция $f \in C^*(uX)$, что $f\left(X \setminus U\right) = 0$ или $f^{-1} = \left(U\right) = \mathrm{R} \setminus \{0\}$. Множество всех равномерно конуль – множеств равномерного пространства $uX$ будет обозначаться через $\mathsf{L}(uX)$.

Остановимся на связях между алгебраическими свойствами кольца $C^*(uX)$ и тополого – равномерными свойствами равномерного пространства $uX$.

Напомним, что *идеалом* кольца $C^*(uX)$ называется собственное подкольцо $I$ кольца $C^*(uX)$ обладающее свойством: если $f \in I$ и $g \in C^*(uX)$ произвольно, тогда $gf \in I$.

Пересечение каждого семейства идеалов является снова идеалом и из принципа максимальности Хаусдорфа выводится тот факт, что всякий идеал содержится в некотором *максимальном*, по включению, идеале.

Идеал $I$ кольца $C^*(uX)$ называется простым, если из $f \cdot g \in I$ следует, что либо $f \in I$, либо $g \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([Г.Ж.]). *Всякий максимальный идеал является простым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непустое подсемейство $\xi \subset \mathsf{Z}\left(uX\right)$ называется $z_u -$ *центрированным на* $uX$, если $\cap \eta \neq \varnothing$ для любого конечного подсемейства $\eta \subset \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустое подсемейство $\mathscr{P} \subset \mathsf{Z}(uX)$ называется $z_u-$*предфильтром*, если выполнены условия:

$1^0$. $\varnothing \in \mathscr{P}$; $2^0$. если $Z_1, Z_2 \in \mathscr{P}$, тогда существует $Z_3 \in \mathscr{P}$ такое, что $Z_3 \subset Z_1 \cap Z_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Непустое подсемейство $\mathscr{F} \subseteq \mathsf{Z}(uX)$ называется $z_u-$*фильтром на* $uX$, если выполнены условия:

$1^0$. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;

$2^0$. *если* $Z_1, Z_2 \in \mathscr{F}$ *тогда* $Z_1 \cap Z_2 \in \mathscr{F}$ *;* .

$3^0$. *если* $Z \in \mathscr{F}$, $Z' \in \mathsf{Z}(uX)$ *и* $Z \subset Z'$, *тогда* $Z' \in \mathscr{F}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если* $\mathscr{P}$ - $z_u-$*предфильтр на* $uX$ *, тогда* $\mathscr{F} = \{Z \in \mathsf{Z}(uX)$ *существует* $V \in \mathscr{P}$ *, для которого* $V \subset Z\}$ *является* $z_u-$*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1^0$. $\varnothing \in \mathscr{F}$ из определения 3. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathscr{F}$, тогда существует $V_1, V_2 \in \mathscr{P}$ такие, что $V_1 \subset Z_1$ и $V_2 \subset Z_2$. В силу $2^0$ определения 3 найдется $V_3 \in \mathscr{P}$ такое, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, тогда $V_3 \subset Z_1 \cap Z_2$ и, следовательно, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathscr{F}$. Условие $3^0$ определения 4. вытекает из самого определения семейства $\mathscr{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Всякая* $z_u-$*центрированная система множеств содержит в некотором* $z_u-$*фильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\xi - z_u-$центрированная система, тогда семейство $\mathscr{P}$ состоящее из всевозможных конечных пересечений элементов $\xi$ является $z_u-$предфильтром. Это следует из того, что если $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \in \xi$ и $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n = Z \neq \varnothing$, то $Z \in \mathsf{Z}(uX)$ $([3-5])$. Следовательно, $\mathscr{P}$ является подсемейством $\mathsf{Z}(uX)$ и обладает всеми свойствами определения 3. Тогда $\mathscr{P}$ содержится в некотором $z_u-$фильтре $\mathscr{F}$ (предложение 5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть* $\xi - z_u-$*предфильтр на* $uX$ *и* $Z' \in \mathsf{Z}(uX)$ *такое, что* $Z' \cap Z \neq \varnothing$ *для любого* $Z \in \xi$. *Тогда семейство* $\xi' = \xi \cup \{Z'\}$ *является* $z_u-$*центрированным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \cup \{Z'\} \subset \xi'$ произвольное конечное подсемейство, где $\eta \subset \xi$. Так как $\xi - z_u-$предфильтр, существует $V \in \xi$ такое, что $V \subset \cap \eta$. По условию $V \cap Z' \neq \varnothing$. Тогда $\cap(\eta \cup \{Z'\}) \neq \varnothing$. Это означает, что $\xi'-$является $z_u-$центрированным семейством.

Через $\mathscr{Y}(\mathsf{Z}(uX))$ обозначим множество всех $z_u-$центрированных семейств на $uX$. $\mathscr{Y}(\mathsf{Z}(uX))$ естественным образом упорядочивается отношением $"<"$. Полагаем для $\xi_1, \xi_2 \in \mathscr{Y}(\mathsf{Z}(uX))$, $\xi_1 < \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 \subset \xi_2$. Максимальные элементы упорядоченного множества называются *максимальными* $z_u-$*центрированными системами.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Всякая максимальная* $z_u-$*центрированная система является* $z_u-$*фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложений 5 и 8 и свойства максимальности.

ТЕОРЕМА 8. *Если* $I$ *идеал в* $C^*(uX)$, *тогда семейство* $\boldsymbol{Z}(I) = \{\boldsymbol{Z}(f) : f \in I\}$ *является* $z_u-$*фильтром на* $uX$. *Обратно, если* $\mathscr{F}$ *является* $z_u-$*фильтром на* $uX$ *, тогда семейство* $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F}) = \{f : \boldsymbol{Z}(f) \in \mathscr{F}\}$ *является идеалом в* $C^*(uX)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $1^0$. $1 \notin I$, следовательно $\varnothing \notin \boldsymbol{Z}(I)$. $2^0$. Пусть $Z_1, Z_2 \in \boldsymbol{Z}(I)$ и $f_1, f_2 \in I$ таковы, что $Z_1 = \boldsymbol{Z}(f_1)$ и $Z_2 = \boldsymbol{Z}(f_2)$. Поскольку $I$ идеал, $f_1^2 + f_1^2 \in I$. Следовательно, $Z_1 \cap Z_2 = \boldsymbol{Z}\left(f_1^2 + f_1^2\right) \in \boldsymbol{Z}(I)$.

$3^0$. Пусть $Z \in \boldsymbol{Z}(I)$, $Z' \in \mathsf{Z}(uX)$ и $Z \subset Z'$. Пусть $f \in I$, $f' \in C^*(uX)$ таковы, что $Z = \boldsymbol{Z}(f)$ и $Z' = \boldsymbol{Z}(f')$. Поскольку $I$ идеал в $C^*(uX)$, $ff' \in I$. Тогда $Z' = Z \cup Z' = \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(f') = \boldsymbol{Z}(ff') \in \boldsymbol{Z}(I)$. Обратно, пусть $J = Z^{-1}(\mathscr{F})$. Т.к. $\varnothing \notin \mathscr{F}$, , получаем $1 \notin J$.

Пусть $f, g \in J$ и $h \in C^*(uX)$. Тогда $\boldsymbol{Z}(f-g) \supseteq \boldsymbol{Z}(f) \cap \boldsymbol{Z}(g) \in \mathscr{F}$ и $\boldsymbol{Z}(hf) \in \mathscr{F}$. По условиям $2^0, 3^0$ определения $z_u -$фильтра, имеем, $f - g \in J$ и $hf \in J$ и $J$ идеал в $C^*(uX)$.

Максимальный $z_u -$фильтр называется $z_u -$*ультрафильтром.* Таким образом, $z_u -$*ультрафильтр* максимальное подсемейство $\mathsf{Z}(uX)$ со свойством центрированности. Это следует из принципа максимальности Хаусдорфа или Куратовского – Цорна ([1]).

ТЕОРЕМА 9. *Каждое $z_u -$центрированное семейство в $\mathsf{Z}(uX)$ содержится в некотором $z_u -$ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что упорядоченное множество $\mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right)$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathscr{A} \subset \left(\mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right), <\right)$ существует $\tilde{\xi} \in \mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right)$, являющееся мажорантой для $\mathscr{A}$. Положим $\tilde{\xi} = \cup\{\xi : \xi \in \mathscr{A}\}$,тогда $\tilde{\xi} \subset \mathsf{Z}(uX)$. Покажем, что $\tilde{\xi} -$ снова $z_u -$центрированная система равномерно нуль - множеств. Пусть $Z_1, \ldots, Z_k$ произвольная конечная подсистема $\tilde{\xi}$. Тогда существует $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathscr{A}$ такие, что $Z_i \in \xi_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. По условию $\mathscr{A}$ цепь в $\left(\mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right), <\right)$, следовательно, существует такая перестановка $i_1, \ldots, i_k$ чисел $\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{k}$, что $\xi_{i_1} < \ldots < \xi_{i_k}$ и, что равносильно $\xi_{i_1} \subset \ldots \subset \xi_{i_k}$. Следовательно, $Z_i \in \xi_{i_k}$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Поскольку $\xi_{i_k}$ - $z_u -$центрировано, $\cap\{Z_i : i = 1, \ldots, k\} \neq \varnothing$ Итак, $\tilde{\xi}$ - $z_u -$ центрированное семейство, $\tilde{\xi} \in \mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right)$ и $\xi \subset \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathscr{A}$. Это равносильно тому, что $\xi < \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathscr{A}$. Итак, $\tilde{\xi}$ мажоранта гнезда $\mathscr{A}$. Тогда га основании принципа максимальности Куратовского – Цорна ([1]), следует, что в упорядоченном множестве $\left(\mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right), <\right)$ существует максимальный элемент $\xi^*$. Покажем максимальность $\xi^*$. Пусть $Z \in \left(\mathsf{Z}(uX)\right) \setminus \xi^*$. Положим $\xi' = \xi^* \cup \{Z\}$. Тогда $\xi^* \subset \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$. Если $\xi'$ - $z_u -$центрированное семейство, тогда $\xi' \in \mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right)$, $\xi^* < \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$. Это противоречит максимальности $\xi^*$ в $\left(\mathscr{Y}\left(\mathsf{Z}(uX)\right), <\right)$. Итак, $\xi' -$ не $z_u -$центрированное семейство. Это означает, что $\xi^*$ - максимальное $z_u -$центрированное семейство.

ТЕОРЕМА 10. *(а) Если $M$ максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда $\boldsymbol{Z}(M)$ является $z_u -$ультрафильтром в $uX$.*

*(б) Если $\mathscr{F}$ $z_u -$ультрафильтр на $uX$, тогда $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а). Пусть $M$ максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда в силу теоремы 2, $\boldsymbol{Z}(M)$ является $z_u -$фильтром. Пусть $\mathscr{F}$ $z_u -$фильтр и $\boldsymbol{Z}(M) \subseteq \mathscr{F}$, тогда $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$ идеал в $C^*(uX)$ и $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F}) \supset M$, но $M$ максимальный идеал, поэтому $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F}) = M$ и $\mathscr{F} = \boldsymbol{Z}(M)$.

Пункт (б) доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. *Отображение* $\boldsymbol{Z}: C^*(uX) \to \mathrm{Z}(uX)$ *осуществляет биекцию между множеством всех максимальных идеалов кольца* $C^*(uX)$ *и множеством всех* $z_u-$*ультрафильтров на* $uX$.

СЛЕДСТВИЕ 10.2.*Если* $\mathscr{F}$ $z_u-$*ультрафильтр и* $Z_1 \cup Z_2 \in \mathscr{F}$, *тогда* $Z_1 \in \mathscr{F}$, *либо* $Z_2 \in \mathscr{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$ и $\boldsymbol{Z}(fg) \supseteq \boldsymbol{Z}(f) \cup \boldsymbol{Z}(g) \in Z_1 \cup Z_2 \in \mathscr{F}$ для которых $f, g \in \tilde{N}^*(uX)$ и $fg \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$. В силу предложения 1, $\boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$ простой идеал, следовательно либо $f \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$, либо $g \in \boldsymbol{Z}^{-1}(\mathscr{F})$. Тогда $Z_1 = \boldsymbol{Z}(f) \in \mathscr{F}$ либо $Z_2 = \boldsymbol{Z}(g) \in \mathscr{F}$

ТЕОРЕМА 11. *(а). Пусть* $M$ *максимальный идеал в* $C^*(uX)$, *если* $\boldsymbol{Z}(f) \cap \boldsymbol{Z}(g) \neq \varnothing$ *для любого* $g \in M$, *тогда* $f \in M$ *и* $\boldsymbol{Z}(f) \in \boldsymbol{Z}(M)$.

*(б). Пусть* $\mathscr{F}$ $z_u-$*ультрафильтр на* $uX$, *если* $Z \in \mathrm{Z}(uX)$ *и* $Z \cap F \neq \varnothing$ *для любого* $F \in \mathscr{F}$, *тогда* $Z \in \mathscr{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что (а) эквивалентно (б). Если выполнен пункт (б), тогда $\mathscr{F} \cup \{Z\}$ центрированное семейство в $\mathrm{Z}(uX)$, а т.к. $\mathscr{F}$ $z_u-$ультрафильтр, тогда $\mathscr{F} \cup \{Z\} \subseteq \mathscr{F}$ и $Z \in \mathscr{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Идеал $I$ в $C^*(uX)$ называется $z_u-$*идеалом*, если из того что $\boldsymbol{Z}(f) \in \boldsymbol{Z}(I)$ следует, что $f \in I$ или, это равносильно тому, что $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(I))$.

Для всякого идеала $J$ кольца $C^*(uX)$ идеал $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(J))$ является наименьшим $z_u-$идеалом содержащим $J$. Ясно, что всякий максимальный идеал является $z_u-$идеалом. Итак, отображение $\boldsymbol{Z}: C^*(uX) \to \mathrm{Z}(uX)$ осуществляет биекцию между множеством всех $z_n-$идеалов кольца $C^*(uX)$ и множеством всех $z_u-$фильтров равномерного пространства $uX$.

Напомним, что идеал $I$ кольца $C^*(uX)$ называется *простым*, если из того, что $fg \in I$ следует или $f \in I$ и $g \in I$.

ТЕОРЕМА 13. *Каждый* $z_u-$*идеал в* $C^*(uX)$ *является пересечением некоторого числа простых идеалов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой О.18. ([8]). Пусть $I$ есть пересечение простых идеалов. Тогда $I = \{f^n : f \in I,\, n \in \mathbf{N}\}$. Ясно, что $\boldsymbol{Z}(f^n) = \boldsymbol{Z}(f)$ для каждого $n \in \mathbf{N}$ и $f^n \in I$ влечет $f \in I$, т.е. $I = \boldsymbol{Z}^{-1}(\boldsymbol{Z}(I))$ и $I-$является $z_u-$идеалом. Обратно, если $I - z_u-$идеал, тогда $f^n \in I$ влечет $f \in I$ и $I$ является пересечением некоторого числа простых идеалов.

ТЕОРЕМА 14. *Если* $I$ *является простым* $z_u$ *- идеалом кольца* $C^*(uX)$, *тогда* $\boldsymbol{Z}(I)$ *является простым* $z_u$*- фильтром на* $uX$ *и, обратно, если* $Z$ *простой* $z_u$*- фильтр на* $uX$, *то* $\boldsymbol{Z}(\mathfrak{F})$ *простой идеал кольца* $C^*(uX)$.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *- простой* $z_u$ *- фильтр на* $uX$. *Тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет точку прикосновения* $x$ *тогда и только тогда, когда* $x$ *является предельной точкой для* $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x$ - точка прикосновения простого $z_u$- фильтра $\mathfrak{F}$. Пусть $V$ произвольная окрестность точки $x$ являющиеся нуль – множеством, т.е. $V \in \mathrm{Z}(uX)$ и $x \in \langle V \rangle$. Тогда существует такие $W \in \mathrm{Z}(uX)$, что $x \in X \setminus W \subset V$. Это следует из того факта, что $\mathrm{Z}(uX)$ образует базу замкнутых множеств $uX$. Тогда имеем $W \cup V = X \in \mathfrak{F}$, следовательно $V \in \mathfrak{F}$ т.к. $x \notin W$. Это означает, что $\mathfrak{F}$ сходится к точке $x$. Обратное утверждение очевидно, т.к. $\cap\{\overline{F} : F \in \mathfrak{F}\} = \{x\} \neq \varnothing$.

**Литература:**


1. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев, Основы общей топологии в задачах и упражнениях.-.М.: Наука, 1974.
2. А.А. Борубаев, Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе, Илим. 1990.
3. M.G. Charalambus, Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.
4. M.G. Charalambus, A new covering dimension function for uniform spaces. J. London Math, Soc. (2)11(1975)137-143.
5. M.G. Charalambus, Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. Czech. Math. Journ.41(116)(1991)378-394
6. Р. Энгелькинг, Общая топология. - М.: Мир, 1986.
7. L. Gillman, M. Jerison, Ring of Continuous Functions. New York (1976).
8. J.R. Isbell. Uniform spaces. Providence. (1964).


**Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Болжиев Б.А.**