Абдраимова М.А.

О СВОЙСТВАХ САМУЭЛОВСКИХ РАСШИРЕНИЙ АНАЛОГИЧНЫХ СТОУН-ЧЕХОВСКИМ

M.A. Abdraimova

PROPERTIES OF SAMUEL'S EXTENSIONS ANALOGIES TO STONE-CECH'S ONES

УДК: 515.123.

При помощи u - ультрафильтров описывается строение Самуэловских бикомпактных расширений.

By means of u - ultrafilters has been the construction Samuel bicompact extensions.

Введение

В работах [9], [10] дано прямое построение Самуэловских бикомпактных расширений ([1]) при помощи u - ультрафильтров. Эти построения производились при помощи операторов «продолжения» открытых множеств, аналогичных операторам П.С.Александрова ([4]), Н.А. Шанина ([5]) и Ю.И.Смирнова ([2]).

В данной работе при помощи u - ультрафильтров описываются фильтры окрестностей точек Самуэловских бикомпактных расширений.

1. Необходимые сведения.

Ниже мы воспроизведем нужные нам в дальнейшем свойства равномерно открытых (равномерно конуль) равномерно замкнутых (равномерно нуль) - множеств, введенных М.Г. Хараламбусом ([7-9]).

Каждое равномерное пространство обозначим как uX , где u -равномерность на тихоновском пространстве X , заданная при помощи равномерных покрытий. Через $C^*(uX)$ обозначается множество всех равномерно непрерывных ограниченных функций на равномерном пространстве uX . Для метрического пространства (M,d) через u_d обозначается метрическая равномерность пространства M соответственно. Через $u_p \subset u$ обозначается сильнейшая предкомпактная равномерность, содержащаяся в u и порождающая исходную топологию на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 ([7-9]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно замкнутым*, если существует такое равномерно непрерывное отображение $f: uX \to u_d M$, что $F = f^{-1}(N)$, где $N \subset M$ замкнутое подмножество равномерного пространства $u_d M$.

Дополнение до *равномерно замкнутого множества* называется *равномерно открытым*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 ([7-9]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно нуль – множеством*, если $F = f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

Дополнение до равномерно *нуль - множества* называется равномерно *конуль - множеством*. Другими словами подмножество $U \subset X$ равномерного пространства uX является равномерно *конуль – множеством*, если $U = f^{-1}(\mathbb{R}\{0\})$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 ([7-9]). *Подмножество* $F \subset X(U \subset X)$ *равномерно замкнуто (равномерно открыто) тогда и только тогда, когда оно является равномерно нуль (конуль) – множеством.*

Через $\mathsf{Z}(uX)(\mathsf{L}(uX))$ обозначим семейство всех равномерно нуль (конуль) - множеств.

ТЕОРЕМА 1.4 ([7-9]). *Для равномерного пространства* uX *семейство* $\mathsf{Z}(uX)(\mathsf{L}(uX))$ *всех равномерно нуль (конуль) – множеств образует базу замкнутых (открытых) множеств.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 ([7-9]). Функция $f: uX \to I = [0;1]$ называется C_u^**-функцией,* если $f^{-1}(U)$ является равномерно конуль – множеством для любого открытого множества $U \subset I$, или, что эквивалентно, $f^{-1}(F)$ является равномерно нуль – множеством для любого замкнутого множества $F \subset I$, т.е. $f^{-1}(F) \in \mathcal{Z}(uX)$ и $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 ([7], Лемма 3). *Пусть* $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}(uX)$ *и* $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. *Тогда существует такая* C_u^* *- функция* $f : uX \to I$ *, что* $F_1 = f^{-1}(0)$ *и* $F_2 = f^{-1}(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**.** Так как $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}(uX)$, что существуют такие равномерно непрерывные функции $g_i : uX \to I$, что $F_1 = g_1^{-1}(0)$ и $F_2 = g_2^{-1}(0)$. По условию $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, следовательно $g_1 + g_2 > 0$. Положим $f = g_1/(g_1 + g_2)$, $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$. Тогда имеем функцию $f : uX \to I$, которая, в общем случае, не является равномерно непрерывной. Имеем $F_1 = f^{-1}(0)$ и $F_2 = f^{-1}(1)$ и для любых $0 < a,\ b < 1$ имеем:

$$f^{-1}([0;a)) = \cup\{g_1^{-1}([0,pa/(1-a))) \cap g_2^{-1}((p;1]) : p \in \mathbb{Q}_p\},$$
$$f^{-1}((b,1]) = \cup\{g_1^{-1}((pb/(1-b),1]) \cap g_2^{-1}([0,p)) : p \in \mathbb{Q}_p\}$$

где $\mathbb{Q}_p \subset I$ множество всех рациональных чисел интервала $[0;1]$. Согласно предложению 1.6., $f^{-1}([0;a))$ и $f^{-1}((b,1])$ - равномерно конуль – множества, т.е. $f^{-1}([0,a)) \in \mathcal{L}(uX)$ и $f^{-1}((b,1]) \in \mathcal{L}(uX)$. Любое открытое множество $U \subset I$ интервала I является счетным объединением конечных пересечений множеств вида $[0,a)$ и $(b,1]$, поэтому $f^{-1}(U)$ открыто в X и следовательно f - является u - функцией.

2.Основные результаты

Напомним определения *u-отделимости, u-вложенности, u-окрестности, u-системы* ([9], [10]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 ([9], [10]).Подмножества $A, B \subseteq X$ равномерного пространства uX называется *u-отделенными*, если существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I = [0,1]$, что $f(A) = \{0\}$ и $f(B) = \{1\}$. Если A u-отделено от $X \setminus B$, тогда B называется *u-окрестностью* A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 ([9], [10]). Пусть $A, B \subseteq X$ подмножества. Множество A называется *u-вложенным* в множество B, если A u-отделено от $X \setminus B$, т.е. существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I$, что $f(A) = \{0\}$ и $f(X \setminus B) = \{1\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 ([9], [10]). Семейство ξ подмножеств равномерного пространства uX называется *u-системой,* если для любого $K \in \xi$ существует $B \in \xi$ такое, что B u-вложено в K, другими словами каждое $K \in \xi$ является u-окрестностью некоторого $B \in \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Центрированная система открытых множеств, являющаяся u-системой, называется *u-центрированной* системой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. u-центрированная система равномерного пространства uX, не являющаяся подсистемой никакой отличной от нее u-центрированной системы называется *u-ультрафильтром.*

Из принципа максимальности Куратовского – Цорна ([3]), вытекает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Всякая u-центрированная система содержится по крайней мере в одном u-ультрафильтре.*

ТЕОРЕМА 2.7. *Семейство ξ_x-всех окрестностей точки $x \in X$ равномерного пространства uX является u-ультрафильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что для любой открытой окрестности O_x точки $x \in X$ найдется такая окрестность U_x этой же точки, что U_x u-отделена от O_x. В силу тихоновости равномерного пространства uX, существует такая равномерно непрерывная функция $f : uX \to I$, что

$f(x)=0$ и $f(X\setminus O_x)=1$ ([8]). Тогда функция $g: uX \to I$ определенная как $g(x)=f(x)$, если $f(x)=1,\ g(x)=0$, если $f(x)\le \frac{1}{2}$ и $g(x)=2\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)$, если $\frac{1}{2}<f(x)<1$ равномерно непрерывна и окрестность $U_x=\left\{x\in X: f(x)<\frac{1}{2}\right\}$ искомая. Имеем $x\in U_x\subseteq \overline{U_x}=\left\{x\in X: f(x)\le\frac{1}{2}\right\}\subset O_x$, $g(U_x)=0$ и $g(X\setminus O_x)=1$. Так как всякая равномерно непрерывная ограниченная функция является C_u^*-функцией ([7-9]) окрестность U_x u-вложена в O_x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Семейство ξ_Z всех открытых u - окрестностей множества $Z\subseteq X$ в равномерном пространстве uX является u - системой на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U\in\xi_z$, т.е. U является произвольной открытой u-окрестностью множества $Z\subseteq X$. Пусть $f: uX\to I$ такая C_u^*-функция, что $f(Z)=0$, и $f(X\setminus U)=1$. Положим $U_1=f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{3}\right)\right)$ и $U_2=f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3};1\right]\right)$. Тогда $U_1\cap U_2=\varnothing,\ Z\subset U_1,\ X\setminus U\subset U_2$ и, в силу непрерывности всякой C_n^* - функции ([6-8]) имеем $\overline{U_1}=f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{3}\right]\right)$ и $\overline{U_2}=f^{-1}\left(\left[\frac{2}{3};1\right]\right)$. Ясно, что $\overline{U_1},\overline{U_2}$ - равномерно замкнуты и $\overline{U_1}\cap\overline{U_2}=\varnothing$. Имеем следующее включение $X\setminus U\subset U_2\subset\overline{U_2}\subset X\setminus\overline{U_1}\subset X\setminus U_1\subset X\setminus Z$. По предложению 1.6 существует такая C_n^* - функция $\varphi: uX\to I$, что $g\left(\overline{U_2}\right)=\{1\}$ и $g\left(\overline{U_1}\right)=\{0\}$. Тогда тем более $g\left(X\setminus U\right)=\{1\}$ и $g\left(U_1\right)=\{0\}$, следовательно, U является u - окрестностью U_1. Это доказывает то, что ζ_Z - является u - системой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Пусть $Z\in \mathbf{Z}(uX)$ и $Z\neq\varnothing$. Тогда множество ξ_Z всех u - окрестностей множества Z непусто, т.е. $\xi_Z\neq\varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно такая функция $f: uX\to I$, что $f(x)=0$ для всех $x\in X$ равномерно непрерывна, и следовательно, является C_u^* - функцией и $f(Z)=0$, где $Z\in\mathbf{Z}(uX)$ и $f(X\setminus X)= f(\varnothing)=1$, т.е. множество Z u - вложено в X, т.е. $X\in\xi_Z$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. *Пусть $z\in s_uX$ - произвольная точка, $\xi_z=\{U\cap X: U$ открыто в s_uX и $z\in U\}$. Тогда семейство ξ_z является u-центрированной на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бикомпакт s_uX является тихоновским пространством, поэтому множество η_z всех открытых окрестностей точки $z\in s_uX$ составляет u - ультрафильтр (теорема 2.7). Легко показать, что $\xi_z=\eta_z\wedge X$ и семейство ξ_z составляет u - центрированную систему.

ТЕОРЕМА 2.11. *Пусть ξ - u - система на uX. Тогда для каждого $U\in\xi$ найдется такое $V\in\xi$, что $[V]_{s_uX}\cap[X\setminus U]_{s_uX}=\varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ξ - u - система, что для любого $U\in\xi$ найдется $V\in\xi$ такое, что U является u - окрестностью V, т.е. существует такая C_u^* - функция $f: uX\to I$, что $f(V)=\{1\}$ и $f(X\setminus U)=\{0\}$. Тогда $f^{-1}(1)\supset V$, $f^{-1}(0)\supset X\setminus U$ и $f^{-1}(0),\ f^{-1}(1)$ - равномерно нуль - множества, т.е. $Z_1=f^{-1}(0)\in\mathbf{Z}(uX)$, $Z_2=f^{-1}(1)\in\mathbf{Z}(uX)$ и $Z_1\cap Z_2=\varnothing$. Для Z_1 и Z_2 существуют такие равномерно непрерывные ограниченные функции $g_1,g_2=C^*(uX)$, что $g^{-1}(0)=Z_1$ и $g_2^{-1}(0)=Z_2$. Функция $\varphi(x)=\dfrac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$ для любого $x\in X$ является C_u^* - функцией $\varphi: uX\to I$ и $Z_1=\varphi^{-1}(0): Z_2=\varphi^{-1}(1)$ (предложение 1.6). Определим функцию $\widetilde{\varphi}: s_uX\to I$ как $\widetilde{\varphi}(z)=\dfrac{s_ug_1(z)}{s_ug_1(z)+s_ug_2(z)}$, для любых $z\in s_uX$, где $s_ug_1: s_uX\to I$ и $s_ug_2: s_uX\to I$ - Самуэловские продолжения функций g_1 и g_2, соответственно. Функция $\widetilde{\varphi}$ - равномерно непрерывна, следовательно, является C_u^* - функций и $\widetilde{\varphi}^{-1}(0)\cap\widetilde{\varphi}^{-1}(1)=\varnothing$. Но выполнено $[Z_1]_{s_uX}\subset\widetilde{\varphi}^{-1}(0)$ и $[Z_2]\subset\widetilde{\varphi}^{-1}(1)$. Тогда $[Z_1]_{s_uX}\cap[Z_2]_{s_uX}=\varnothing$, следовательно $[V]_{s_uX}\cap[X\setminus U]_{s_uX}=\varnothing$, т.к. $[V]_{s_uX}\subset[Z_1]_{s_uX}$ и $[X\setminus U]_{s_uX}\subset[Z_2]_{s_uX}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Пусть $z\in s_uX$ - произвольная точка, $\xi_z=\{U\cap X: U$ открыто в s_uX и $z\in U\}$. Тогда ξ_z - u - ультрафильтр на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1, достаточно показать максимальность ξ_z. Пусть существует u - центрированная система ξ, строго содержащая ξ_z, т.е. $\xi_z\subset\xi$. Пусть $U\in\xi\setminus\xi_z$ и $V\in\xi$ таково, что U - u -окрестность V, т.е. существует C_u^* - функция $f: uX\to I$ такая, что $f(V)=\{0\}$ и $f(X\setminus U)=\{1\}$. Ясно, что любая окрестность точки z пересекается с $X\setminus U$, иначе выполняется $U\in\xi_z$, что противоречит тому, что $U\in\xi\setminus\xi_z$. Тогда точка $z\in s_uX$ является точкой прикосновения для $X\setminus U$ в s_uX, т.е. $z\in[X\setminus U]_{s_uX}$. Но, в силу теоремы 2.11, выполняется $[V]_{s_uX}\cap[X\setminus U]_{s_uX}=\varnothing$, следовательно $z\notin[V]_{s_uX}$. Тогда $O_Z=s_uX\setminus[V]_{s_uX}$ - открытая окрестность точки $z\in s_uX$, и поэтому $O_Z\cap X\in\xi_Z$. Но, очевидно $(O_Z\cap X)\cap V=\varnothing$. Это противоречить тому, что ξ - u - центрировано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. *Пусть ξ - произвольный u - ультрафильтр на uX. Тогда $\xi=\xi_z$ для некоторой точки $z\in s_uX$, причем $\{z\}=\bigcap\{[U]_{s_uX}: U\in\xi\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система $\overline{\xi}=\{[U]_{s_uX}: U\in\xi\}$ является центрированной системой замкнутых множеств в бикомпакте s_uX, следовательно $\cap\overline{\xi}\neq\varnothing$, т.е. $\cap\{[U]_{s_uX}: U\in\xi\}=\Phi\neq\varnothing$. Пусть $z\in\hat{O}$. Тогда, по теореме 3, ξ_z - u - ультрафильтр на uX, следовательно $\xi_z\cup\xi\subset\xi_z$ и $\xi_z\subset\xi\cup\xi_z$. Так как ξ - также u - ультрафильтр, то имеем $\xi_z=\xi_z\cup\xi=\xi$.

ТЕОРЕМА 2.14. *Подмножества $A,B\subset X$ u - отделимы тогда и только тогда, когда $[A]_{s_uX}\cap[B]_{s_uX}=\varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A,B\subset X$ u - отделимы, т.е. существует C_u^* - функция $f: uX\to I$ такая, что $f(A)=\{0\}, f(B)=\{1\}$. Тогда $Z_0=f^{-1}(0), Z_2=f^{-1}(1)$ равномерно нуль - множества, т.е. $Z_0,Z_1\in\mathsf{Z}(uX)$, $A\subset Z_0, B\subset Z_1$ и $Z_0\cap Z_1=\varnothing$. Для Z_1, Z_2 существуют такие равномерно непрерывные ограниченные функции $g_1,g_2\in C^*(uX)$, что $g_1^{-1}(0)=Z_1, g_2^{-1}(0)=Z_2$. Функция $\varphi(x)=\dfrac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)}$ для любого $x\in X$ является C_u^* - функцией, $\varphi: uX\to I$ и $Z_1=\varphi^{-1}(0)$ и $Z_2=\varphi^{-1}(1)$. Определим функцию $\widetilde{\varphi}: uX\to I$ как $\widetilde{\varphi}(z)=\dfrac{s_ug_1(z)}{s_ug_1(z)+s_ug_2(z)}$ для всех $z\in s_uX$, где $s_ug_1: s_uX\to I$ и $s_ug_2: s_uX\to I$ - Самуэловские продолжения функций g_1 и

g_2, соответственно. Функция $\widetilde{\varphi}$ - равномерно непрерывна и $\widetilde{\varphi}^{-1}(0)\cap\widetilde{\varphi}^{-1}(1)=\varnothing$. Имеем, включения $[Z_1]_{s_uX}\subset\widetilde{\varphi}^{-1}(0)$ и $[Z_2]\subset\widetilde{\varphi}^{-1}(1)$. Тогда $[Z_1]_{s_uX}\cap[Z_2]_{s_uX}=\varnothing$, следовательно $[A]_{s_uX}\cap[B]_{s_uX}=\varnothing$, т.к. $[A]_{s_uX}\subset[Z_1]_{s_uX}$ и $[B]_{s_uX}\subset[Z_2]_{s_uX}$.

Обратно, если $[A]_{s_uX}\cap[B]_{s_uX}=\varnothing$. Тогда, в силу нормальности s_uX и по Большой лемме Урысона, существует непрерывная на бикомпакте s_uX, и следовательно равномерно непрерывная, функция $f:uX\to I$ такая, что $f([A]_{s_uX})=\{0\}$, $f([B]_{s_uX})=\{1\}$. Тогда функция $g=f|_X:uX\to I$ также равномерно непрерывна и $g(A)=\{0\}$, $g(B)=\{1\}$, т.е. A и B u - отделимы.

ТЕОРЕМА 2.15. (Характеристика Самуэловских бикомпактных расширений). *Пусть b_uX такое бикомпактное расширение равномерного пространства uX, что равномерность b_uX индуцирует на X равномерность $u_p\subset u$. Бикомпакт b_uX равномерно гомеоморфен s_uX тогда и только тогда, когда для любых u - отделимых подмножеств A и B из X выполняется $[A]_{b_uX}\cap[B]_{b_uX}=\varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b_uX и s_uX - равномерно гомеоморфны и $[A]_{s_uX}\cap[B]_{s_uX}=\varnothing$ выполнено для некоторых A,B из X. Тогда согласно теореме 5 и задаче 10, гл. IV ([3]) выполнено выражение $[A]_{b_uX}\cap[B]_{b_uX}=\varnothing$.

Обратно, если $[A]_{b_uX}\cap[B]_{b_uX}=\varnothing$ выполнено для некоторых A и B из X, то в силу нормальности бикомпакта b_uX и по Большой лемме Урысона существует непрерывная функция $f:b_uX\to I$ такая, что $f([A]_{b_uX})=\{0\}$, $f([B]_{b_uX})=\{1\}$. В силу бикомпактности b_uX, функция $f:b_uX\to I$ является равномерно непрерывной, следовательно функция $g=f|_X:uX\to I$ также равномерно непрерывна и $g(A)=\{0\}$, $g(B)=\{1\}$, т.е A u - отделимо от B в X. Тогда согласно теореме 2.14 имеем $[A]_{b_uX}\cap[B]_{b_uX}=\varnothing$ и b_uX гомеоморфно s_uX (задача 10, гл. IV ([3])). Функция $y=f|_X:uX\to I$ равномерно непрерывна т.к. равномерно непрерывна функция $g=f|_X:u_pX\to I$, $u_p\subset u$ предкомпактная равномерность в U, индуцированная равномерностью бикомпакта b_uX на X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. *Пусть $U\subset X$ открытое множество и $\widetilde{U}$ наибольшее открытое множество в s_uX такое, что $\widetilde{U}\cap X=U$. Тогда $\widetilde{U}=s_uX\setminus[X\setminus U]_{s_uX}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V\subset s_uX$ - открыто и $X\cap V=U$. Тогда $[X\setminus U]_{s_uX}=[X\setminus(X\cap V)]_{s_uX}=[X\setminus V]_{s_uX}$ и $[X\setminus V]_{s_uX}\subset[s_uX\setminus V]_{s_uX}=s_uX\setminus V$, т.е. $[X\setminus U]_{s_uX}\subseteq s_uX\setminus V$ или $V\subset s_uX\setminus[X\setminus U]_{s_uX}=\widetilde{U}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. *Пусть $U\subset X$ - открытое множество. Тогда произвольный u - ультрафильтр ξ на uX содержит U тогда и только тогда когда $\xi=\xi_Z$ для некоторого $z\in\widetilde{U}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4 имеем, $\xi=\xi_z$, где $\{z\}=\cap\left\{[V]_{s_uX}:U\in\xi\right\}$. Покажем, что $z\in\widetilde{U}$, где $\widetilde{U}=s_uX\setminus[X\setminus U]_{s_uX}$ по теореме 2.11. Предположим, что $z\notin\widetilde{U}$, тогда $z\in[X\setminus U]_{s_uX}$. Из $U\in\xi$ и того, что ξ - u - ультрафильтр следует, по теореме 2, $[V]_{s_uX}\cap[X\setminus U]_{s_uX}=\varnothing$ для некоторого $V\in\xi$. Так как $z\in[X\setminus U]_{s_uX}$, тогда каждая окрестность точки z пересекается с $X\setminus U$. Тогда $O_z=s_uX\setminus[V]_{s_uX}\supset[X\setminus U]_{s_uX}$ открытая окрестность точки z

и $O_z \cap X \in \xi$. Тогда $(O_z \cap X) \cap V = \varnothing$, что противоречит тому, что ξ - u - ультрафильтр. Итак, $z \in \tilde{U}$ и $\xi = \xi_z$.

Обратное, очевидно т.к. если $z \in \tilde{U}$, тогда по теореме 3, $U = \tilde{U} \cap \tilde{O} \in \xi_z$ и $\xi = \xi_z$.

ТЕОРЕМА 2.18. *Пусть* $b_u X$ *- такое бикомпактное расширение равномерного пространства* uX *что равномерность* $b_u X$ *индуцирует на* X *равномерность* $u_p \subset u$, *и для каждого* $z \in b_u X$ *семейство* ξ_z *- является* u *- ультрафильтром на* uX. *Тогда* $b_u X$ *является Самуэловским бикомпактным расширением* $s_u X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. по теоремам 5,6, существуют замкнутые u - отделимые подмножества $P, Q \subset X$ такие, что $[P]_{b_u X} \cap [Q]_{b_u X} \neq \varnothing$. Обозначим через ξ_Q и ξ_P - множество все u - окрестностей множеств Q и P, соответственно. Согласно предложениям 2.8 и 2.9 $\xi_P \neq \varnothing$ и $\xi_Q \neq \varnothing$ образуют

u-центрированные системы. Тогда $X \setminus P \in \xi_Q$ и $X \setminus Q \in \xi_P$. Зафиксируем $z \in [P]_{b_u X} \cap [Q]_{b_u X}$. Так как ξ_P - u - центрированная система и каждый элемент ξ_z пересекается с каждым элементом ξ_P, то $\xi_z \cup \xi_P$ - u - центрированное семейство. Так как ξ_z - u - ультрафильтр $\xi_z \cup \xi_P \subset \xi_z$, следовательно $\xi_P \subset \xi_z$. Аналогично, $\xi_Q \subset \xi_z$. Тогда $\xi_P \cup \xi_Q \subset \xi_z$. Но u - отделимые множества имеют непересекающиеся u - окрестности ([7]), поэтому некоторый элемент из ξ_P не пересекается с некоторым элементом из ξ_Q, а это противоречит тому, что ξ_z - u - ультрафильтр.

Литература:

1. Samuel P. Ultrafilters and compactifications of uniform spaces. –Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 100-132.
2. Смирнов Ю.М. О полноте пространств близости. -Тр. Моск. матем. общ-ва 3 (1954), 271-3 06.
3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. -М.: Наука, 1974.
4. Александров П.С. О бикомпактных расширениях топологических пространств. – Матем. сб. 5 (1939), 403-423.
5. Шанин Н.А. О специальных расширениях топологических пространств. – ДАН СССР 38 (1943), 7-11.
6. Charalambous M.G. Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.
7. Charalambous M.G. A new covering dimension function for uniform spaces. J. London Math, Soc. (2) 11 (1975), 137-143.
8. Charalambous M.G. Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. Czech. Math. Journ. 41 (116) (1991), 378-394.
9. Чекеев А.А., Абдраимова М.А. О новом подходе к построению бикомпактных расширений равномерных пространств. Изв.НАН КР №1, Бишкек 2010, 52–55.
10. Чекеев А.А., Абдраимова М.А. О прямом описании Самуэловских бикомпактных расширений. Вест. КНУ им. Ж.Баласагына, Т. XII, С. 3, Бишкеке 2009, 14-31.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Болжиев Б.А.