Мальчик Ю.Н.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ Л.ЗАДЕ

Yu.N. Malchik

ONE METHOD SOLUTION OF L.ZADEH EQUATION

УДК: 62-50

Предложен способ поиска передаточной функции нестационарной линейной системы на интервале $0 \le t < \infty$. Передаточная функция является частным решением уравнения Л.Заде.

The author offers a new method for search of the particular solution of L. Zadeh equation for interval $0 \le t < \infty$. This solution is function of L. Zadeh.

При исследовании нестационарных систем (НДС), уравнения вынужденных колебаний (УВК) которых имеют вид

$$\left[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \ldots + b_n(t)\right]x(t) = \left[a_0(t)p^{n-1} + a_1(t)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(t)\right]y(t),\ p \equiv \frac{d}{dt},\ t \in (-\infty, T), \tag{1.1}$$

где $T \le \infty$; $y(t)$, $x(t)$ –соответственно входной и выходной сигналы; $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ и $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ – вещественные непрерывные функции аргумента t , часто возникает задача о вычислении передаточной функции $W(s,t)$ системы.

Рассмотрим два основных способа решения этой задачи.

Передаточная функция (ПФ) НЛС, процессы в которой описываются уравнением вида (1.1), может быть найдена по формуле Ш.Блана [1]

$$W(s,t) = e^{-st}\int_{-\infty}^{t} w(t,u)e^{su}du. \tag{1.2}$$

Здесь: s – комплексный аргумент; $w(t,u)$ – импульсная переходная функция НЛС (реакция системы на импульс $\delta(t-u)$).

Передаточная функция НЛС с УВК (1.1) может быть найдена как частное решение уравнение Л.Заде [2]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d^kD(s,t)}{ds}\cdot\frac{d^kW(s,t)}{dt} = K(s,t), \tag{1.3}$$

где $D(s,t) = s^n + b_1(t)s^{n-1} + \ldots + b_n(t)$; $K(s,t) = a_0(t)s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)$.

Анализируя формулу (1.2), авторы работы [3, с.260] пришли к следующему выводу.

Существование ПФ для НЛС не является обязательным.

Могут встречаться задачи, когда УВК задано и исследуется на неограниченном слева интервале, а коэффициенты уравнения таковы, что ПФ не существует. Поэтому передаточную функцию системы можно вычислить лишь приближенно.

Возникает вопрос. Как можно вычислить приближенно то, чего не существует?

Далее, какое частное решение комплексного линейного дифференциального уравнения (1.3) нужно взять в качестве передаточной функции НЛС, УВК которой имеет вид (1.1)?

Целью настоящей статьи является поиск ответов на поставленные вопросы.

2. Нестационарная линейная система первого порядка

Пусть УВК НЛС имеет вид

$$[p + b(t)]x(t) = a(t)y(t),\quad -\infty < t < T,\quad p = d/dt, \tag{2.1}$$

где $T \le \infty$; $y(t)$, $x(t)$ –соответственно входной и выходной сигналы; $b(t)$ и $a(t)$– вещественные непрерывные функции аргумента t. Уравнению (2.1), описывающему колебания в системе, соответствует уравнение Л.Заде

$$\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{k!}\frac{d^kD(s,t)}{ds}\cdot\frac{d^kW(s,t)}{dt}=K(t), \tag{2.2}$$

Здесь: s – комплексная переменная; $D(s,t) = s + b(t)$; $K(t) = a(t)$. Уравнение (2.2) запишем в виде

$$[p + s + b(t)]W(s,t) = a(t). \tag{2.3}$$

Согласно [4, с.15] для уравнения (2.1) выполнены условия существования и единственности решения на плоскости P, определенной условиями $-\infty < t < T$.

Аналогично для комплексного линейного дифференциального уравнения существует решение $W = \varphi(t)$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0)= W_0 \tag{2.4}$$

причем единственное [4, с. 35].

Таким образом, для НЛС описываемых уравнением (2.1) ПФ существует на интервале - $-\infty < t < T$.

2.2. Выбор частного решения для получения ПФ

Выясним, какое решение уравнения (2.3) нужно выбрать, чтобы оно было ПФ для НЛС первого порядка.

Рассмотрим пример 7.1 из работы [3, с.264].

Определить ПФ системы, для которой дифференциальное уравнение связи между входной и выходной величинами имеет вид

$$[(1 + at)p + 1]p = y,\ \ a > 0. \tag{2.5}$$

Передаточная функция здесь удовлетворяет уравнению

$$[(1 + at)p + (1 + at)s + 1]W(s,t)=1,$$

общее решение, которого при $a = 0,5$ есть

$$W=\frac{W_0\exp(-st)}{(1+0.5t)^2}+\frac{(1+0.5t)s-0.5}{(1+0.5t)^2}.$$

Выбирая в качестве ПФ частное решение с нулевыми начальными условиями, найдем

$$W_0=\frac{1-2s}{2s^2}.$$

Следовательно, ПФ при анализе процесса на интервале наблюдения может быть принята в виде

$$W(s,t)=\frac{(2s-1)(1-\exp(-st)}{2s^2(1+0.5t)^2}+\frac{1}{2(1+0.5t)^2s}. \tag{2.6}$$

На каком интервале наблюдается процесс?

На наш взгляд выражение (2.6) мало пригодно для анализа процесса в НЛС на интервале $0 \le t < \infty$. Во-первых, оно громоздко и сложно. Во-вторых, совсем не пригодно для структурных преобразований. Этот пример только вводит читателя в заблуждение.

Передаточная функция НЛС, УВК которой имеет вид (2.5) для $a = 0,5$, должна быть представлена как

$$W(s,t)=\frac{2}{(t+2)^2}\left(\frac{t+2}{s}-\frac{1}{s^2}\right). \tag{2.7}$$

Найдем аналитическое решение уравнения (2.5) при воздействии

$y = exp(-\alpha t)$ и $x(0) = 0$, на интервале $[0, T)$. Для этого используем формулу Л.Заде

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}W(s,t)\cdot Y(s)\cdot\exp(st)ds.$$

Подынтегральное выражение в (2.8) удовлетворяет условиям леммы Жордана [5] , тогда выходной сигнал x может быть рассчитан с применением теории вычетов по формуле

$$x(t)=\sum \operatorname{Re}s\left[W(s,t)\cdot Y(s)\cdot \exp(st)\right].$$

С учетом $Y(s) = 1/(s+\alpha)$ получим

$$x(t)=\frac{2}{(t+2)^2}\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{2}{(t+2)^2}\left(\frac{t+2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\exp(-\alpha t).$$

Сравним результаты решения уравнения (2.5) на ЭВМ и аналитическое решение.

Решение на ЭВМ в среде MathCAD:

α := 0.5 y(t) := exp(-αt)

Given

x'(t) + 2/(t+2)·x(t) = 2/(t+2)·y(t) x(0) = 0

x := Odesolve (t, 10) t := 0, 0.1..10

Аналитическое решение имеет вид

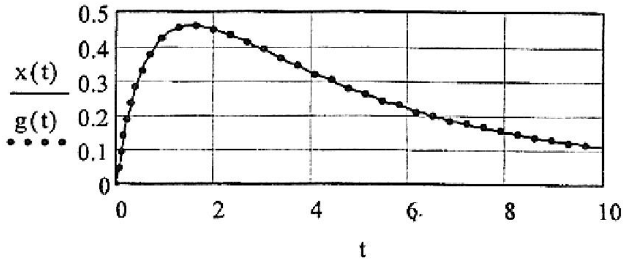

Рис. 1.

$$g(t)=\frac{2}{(t+2)^2}\left(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{2}{(t+2)^2}\left(\frac{t+2}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\exp(-\alpha t).$$

Совпадение кривых идеальное.

Для поиска ПФ возможен следующий подход. Пусть УВК НЛС имеет вид (2.1). Этому УВК соответствует уравнение ПФ вида (2.3). В разделе (2.1) показано, что существует решение $W = \varphi(t)$ уравнения (2.3), удовлетворяющее начальным условиям (2.4).

Обобщенное характеристическое уравнение для

$$[p + D(s,t)]W(s,t) = 0$$

следующий вид

$$\zeta(s,t) + D(s,t) = 0.$$

Отсюда $\zeta = - D$. Тогда импульсная переходная функция (ИПФ) для УВК (2.1) есть [6]

$$g(t,u)=\exp\int_u^t \varsigma(v)dt\,.$$

Следовательно, ПФ $W(s,t)$ может быть найдена по формулам

$$W(s,t)=\int_0^t g(t,u)\cdot a(u)\cdot du \qquad (2.9)$$

либо

$$W(s,t) = \int_{-\infty}^{t} g(t,u) \cdot a(u) \cdot du. \qquad (2.10)$$

В случае формулы (2.9) имеем

$$W(s,t) = W(s,t)_{св} + W(s,t)_{вын}$$

Тогда ПФ

$$W(s,t) = W(s,t)_{вын}.$$

В случае (2.10) сразу получим

$$W(s,t) = W(s,t)_{вын}. \qquad (2.11)$$

Изложенную методику решения уравнения Л.Заде можно распространить на системы порядка $n > 1$.

3. Нестационарная линейная система второго порядка
3.1. Существование передаточной функции

Рассмотрим НЛС второго порядка, УВК которой имеет вид

$$[p^2 + b_1(t)p + b_2(t)] \cdot x(t) = y(t), \quad p = d/dt, t \in (-\infty, T), \qquad (3.1)$$

где $T \le \infty$, y(t), x(t) – входной и выходной сигналы; $b_1(t)$, $b_2(t)$ – вещественные непрерывные функции аргумента t.

Уравнению (3.1) соответствует уравнение Л.Заде

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \frac{d^k D(s,t)}{ds} \cdot \frac{d^k W(s,t)}{dt} = 1. \qquad (3.2)$$

Здесь:

$$D(s,t) = s^2 + b_1(t)s + b_2(t).$$

Уравнение (3.2) запишем в виде

$$\left[p^2 + (2s + b_1)p + s^2 + b_1 s + b_2\right] \cdot W(s,t) = 1 \qquad (3.3)$$

Согласно [4, с. 35] для комплексного линейного дифференциального уравнения (3.3)существует решение $W = \varphi(t)$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0) = W_0, \ \varphi'(t_0) = W'_0 \qquad (3.4)$$

причем единственное.

Таким образом, для НЛС, описываемой уравнением (3.1), ПФ существует.

Результаты исследования задачи о существовании ПФ $W(s,t)$ НЛС можно распространить на системы любого порядка.

Л.С. Понтрягин в работе [4, с. 35] доказал, что для комплексного уравнения

$$z^{(n)} = f(t, z, z', \ldots, z^{(n-1)}),$$

правая часть, которого является многочленом с коэффициентами, являющимися непрерывными действительными или комплексными функциями переменного t, определенными на интервале $q_1 < t < q_2$ существует единственное решение $z = \varphi(t)$ удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0) = z_0, \ \varphi'(t_0) = z'_0, \ \ldots, \ \varphi'(t_0) = z^{(n-1)}.$$

3.2. Отыскание передаточной функции

Обобщенное характеристическое уравнение (ОХУ) для уравнения

$$\left[p^2 + (2s + b_1)p + s^2 + b_1 s + b_2\right] \cdot W(s,t) = 0$$

имеет вид

$$\varsigma^2 + (2s + b_1)\varsigma + (s^2 + b_1 s + b_2) + \dot{\varsigma} = 0. \qquad (3.5)$$

Для ОХУ (3.5) не существует формулы общего решения. Это уравнение Риккати. Рассмотрим частный случай:

$$b_1 = \frac{2}{t+a}, \quad b_2 = -k^2 .$$

Тогда ОХУ (3.5) примет вид

$$\varsigma^2 + (2s + \frac{2}{t+a})\varsigma + (s^2 + \frac{2}{t+a}s - k^2) + \dot{\varsigma} = 0. \qquad (3.6)$$

В [7] показано, что для ОХУ вида

$$\zeta^2 + f \cdot \zeta + f^2/4 + f'/2 - k^2 + \zeta' = 0, \quad k - const,$$

корни имеют вид

$$\zeta_{1,2} = -f/2 \pm k.$$

Следовательно, для ОХУ (3.6) имеем

$$\varsigma = -\left(s + \frac{1}{t+a}\right) \pm k. \qquad (3.7)$$

Тогда ИПФ для УВК (3.1) имеет вид [6]

$$g(t,u) = \frac{\exp \int_u^t \varsigma_2(v)dv - \exp \int_u^t \varsigma_1(v)dv}{\varsigma_2(u) - \varsigma_1(u)},$$

и в случае (3.7) ИПФ равна

$$g(t,u) = \frac{1}{2k}\left[\frac{u+a}{t+a}e^{-(s-k)t+(s-k)u} - \frac{u+a}{t+a}e^{-(s+k)t+(s+k)u}\right]. \qquad (3.8)$$

Отсюда, с учетом (3.8) и формулы [6]

$$W(s,t) = \int_{-\infty}^{t} g(t,u) \cdot du.$$

получим

$$W(s,t) = \frac{s^2 - 2s/(t+a) - k^2}{(s-k)^2(s+k)^2}. \qquad (3.9)$$

3.3. Сравнение решений уравнений вынужденных колебаний

Сравним результаты решения УВК

$$\left[p^2 + \frac{2}{t+a}p - k^2\right] \cdot x(t) = y(t), \quad a > 0, \ t \in [0, T), \qquad (3.10)$$

полученного с помощью ЭВМ и аналитической формулой, полученной с помощью ПФ (3.9) и теории вычетов.

Ищем аналитическое решение УВК (3.10) при нулевых начальных условиях

$$x(0) = 0, \ x'(0) = 0 \qquad (3.11)$$

и входном сигнале $y(t) = 1$.

Поскольку (3.10) – линейное уравнение и $b_1(t)$, $b_2(t)$ – непрерывны на интервале $0 \le t < T$, то решение $\varphi(t)$ удовлетворяющее начальным условиям (3.11) существует и единственно.

Пусть, $a = 2$, $k = 2$. Тогда выходной сигнал x может быть рассчитан с помощью теории вычетов по формуле

$$x(t) = \sum \operatorname{Re} s[W(s,t)\cdot Y(s)]\cdot \exp(st).$$

С учетом (3.9) и $Y(s) = 1/s$, получим

$$x(t) = \frac{2}{t+2}\left(0.156\cdot\exp(2t) + 0.94\cdot\exp(-2t)\right) - 0.25. \quad (3.12)$$

Решение она ЭВМ в среде MathCAD:

$a := 2 \quad k := 2 \quad y(t) := 1$

Given

$x''(t) + 2/(t+a)\cdot x'(t) - k^2 = y(t) \quad x'(0) = 0 \;\; x(0) = 0$

$x :=$ Odesolve(t, 2) t:= 0, 0.1..2

Аналитическое решение

$$xa(t) := \frac{a}{t+a}[0.156\cdot\exp(kt) + 0.094\cdot\exp(-kt)] - \frac{1}{k^2} \qquad g(t) := xa(t)$$

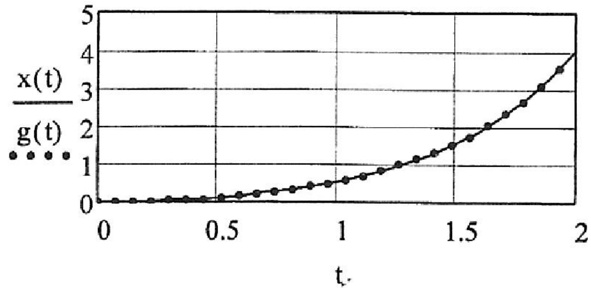

Рис. 2. Совпадение кривых идеальное.

4. Заключение

В статье показано, что:

- нет таких нестационарных линейных систем, уравнения вынужденных колебаний которых содержит на интервале (∞, T) только непрерывные коэффициенты, для которых передаточная функция W(s,t) не существует;
- в отличие от передаточной функции Ш. Блана, передаточная функция как решение уравнения Л. Заде может быть найдена на любом конечном интервале вообще и на интервале $0 \le t < T$ в частности;
- передаточной функцией W(s,t) нестационарной линейной системы является вынужденная составляющая $W_{вын}(s,t)$ решения уравнения Л.Заде.

Литература:

1. Blanc Ch, Sur les equation differentials lineares a coefficients lenement variable, - Bull, technique de la Suisse romande, 1948. v.74, №15, p.182-189.
2. Zadeh L.A. Frequency analysis of linear variable networks. Proc. IRE, 1950, N3, 38, p.291-299.
3. Михайлов Ф.А., Теряев Е.Д.. Булеков В.П. и др. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами. М.: Наука, 1971, 561 с.
4. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982, 272 с.
5. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967, 780 с.
6. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем. М.: Машиностроение, 1977, 296 с.
7. Валяев А.Н., Мальчик Ю.Н. О способах отыскания приближенных формул решений уравнений свободных колебаний второго порядка. Депонированная рукопись № 603, Алма-Ата: Каз НИИТИ, 50 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Усманов С.Ф.