Мальчик Ю.Н.

ОБ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ ОТЫСКАНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Yu.N. Malchik

THE AUTHOR OFFERS A NEW METHOD FOR SEARCH OF THE GENERAL SOLUTION'S APPROXIMATE OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH TIME-VARYING COEFFICIENT

УДК: 517.94

Уточняется известный способ отыскания общего решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в особых случаях.

This paper defines more precisely of the known method design of the general solution of linear differential equation with time-varying coefficient for special cases.

1. Введение

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение (ЛДУ) вида

$$\left[p^n + b_1(t)\,p^{n-1} + \cdots + b_n(t)\right]\cdot x(t) = y(t),$$
$$p \equiv \frac{d}{dt}, \quad t \in [0,\ \infty). \qquad (1.1)$$

Здесь: $b_1(t), \dots, b_n(t)$ – вещественные функции, непрерывные и любое число раз дифференцируемые на интервале $[0,\ \infty)$;

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} P_i(t)\exp\lambda_i t, \qquad (1.2)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – комплексные константы; $P_i(t)$ – полином вида

$$P_i(t) = C_{i,0} + C_{i,1}t + \dots + C_{i,m}t^m\ ;$$

$C_{i,0}, \dots, C_{i,m}$ – комплексные константы.

Пусть требуется найти общее решение уравнения (1.1).

Как известно [1], общее решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$x_{общ}(t) = \xi(t) + \varphi(t). \qquad (1.3)$$

Здесь: $\xi(t)$ – общее решение однородного уравнения

$$\left[p^n + b_1(t)\,p^{n-1} + \cdots + b_n(t)\right]\cdot x(t) = 0, \qquad t \in [0,\ \infty); \qquad (1.4)$$

$\varphi(t)$ – любое частное решение неоднородного уравнения (1.1).

Функция $\xi(t)$ может быть представлено в виде [1]

$$\xi(t) = C_1\, \xi_1(t) + \ldots + C_n\, \xi_n(t), \tag{1.5}$$

где C_1, ..., C_n – произвольные комплексные постоянные; $\xi_1(t),\ldots, \xi_n(t)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (1.4).

Если известна система функций $\xi_1(t),\ldots, \xi_2(t)$, то частное решение $\varphi(t)$ неоднородного уравнения (1.1) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных в виде [1]

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) \int \frac{W_\nu(t)}{W(t)} dt.$$

Здесь $W(t)$ – определитель Вронского для функций $\xi_\nu(t)$; $W_\nu(t)$ – определитель получающийся из определителя $W(t)$ заменой ν-го столбца на

$[0, 0, \ldots, y(t)]^T$.

Однако фундаментальная система $\xi_1(t),\ldots, \xi_2(t)$ решений уравнения (1.4) может быть найдена лишь в исключительных случаях (в случаях интегрируемости уравнения (1.4) в квадратурах). В общем же случае речь может итти только об аппроксимации $\widetilde{\xi}_1(t),\ldots,\widetilde{\xi}_n(t)$ элементов этой системы и, следовательно, об аппроксимации $\widetilde{\varphi}(t)$ частного решения уравнения (1.1).

Методы отыскания аппроксимации $\widetilde{\xi}_1(t),\ldots,\widetilde{\xi}_n(t)$ фундаментальной системы решений уравнения (1.4) изложены в работах [1, 2] Ф.А. Михайлова.

Если аппроксимации $\widetilde{\xi}_1(t),\ldots,\widetilde{\xi}_n(t)$ фундаментальной системы решений уравнения (1.4) найдены, то аппроксимация $\widetilde{\varphi}(t)$ частного решения уравнения (1.1) может быть найдена методом вариации произвольных постоянных в виде [1]

$$\widetilde{\varphi}(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu(t) \int \frac{\widetilde{W}_\nu(t)}{\widetilde{W}(t)} dt. \tag{1.6}$$

Здесь $\widetilde{W}_\nu(t)$ - определитель полученный из соответствующего системе функций $\widetilde{\xi}_1(t),\ldots,\widetilde{\xi}_n(t)$ определителя Вронского $\widetilde{W}(t)$ заменой элементов ν - го столбца на $[0, 0, \ldots, y(t)]^T$.

Тогда приближенная формула общего решения уравнения (1.1) может быть представлена в виде [1]

$$\widetilde{x}_{общ}(t) = \widetilde{\xi}(t) + \widetilde{\varphi}(t). \tag{1.7}$$

Однако при отыскании функции $\widetilde{\varphi}(t)$ по формуле (1.6), как правило, возникают сложности, связанные с вычислением неопределенных интегралов.

В [3] приводится алгоритм отыскания аппроксимации частного решения $\widetilde{\varphi}(t)$ линейного дифференциального уравнения (1.1), однако возможны особые случаи, когда необходимо уточнение указанного алгоритма.

В настоящей статье рассматриваются особые случаи отыскания частного решения $\varphi(t)$ уравнения (1.1), и уточняется алгоритм, предложенный в работе [3].

2. Особые случаи отыскания общего решения неоднородного дифференциального уравнения

Пусть начальные условия для уравнения (1.1) нулевые, т.е.

$$p^k x(t)\Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p \equiv \frac{d}{dt}. \tag{2.1}$$

Требуется определить решение уравнения (1.1) с правой частью правой частью (1.2), удовлетворяющее условиям (2.1).

Обозначим через $g(t, u)$* решение уравнения (1.4) при $t > u$ и начальных условиях

$$p^k x(t)\Big|_{t=0} = 0. \quad k = 0, 1, \ldots, n-2;$$

$$p^{n-1} x(t)\Big|_{t=u+0} = 1.$$

* Решение g(t, u) в [2] названо импульсной переходной функцией.

Пусть

$$F(s) = L[f(t)] \equiv \int_{0-}^{\infty} f(t)exp(-st)dt.$$

Тогда, если существует передаточная функция [4]

$$G(s,t) = exp(-s,t)\int_{-\infty}^{t} g(t,u)exp(su)\,du,$$

то решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.1), может быть найдено по формуле Заде [5]

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s,t)Y(s)exp(st)\,ds.$$

Здесь $Y(s)$ – изображение Лапласа функции $y(t)$; $i = \sqrt{-1}$; c – вещественное число, выбранное с таким расчетом, чтобы интеграл абсолютно сходился при всех $Re\, s \geq c$.

Пусть функция G(s, t) может быть представлена в виде

$$G(s,t) = \frac{c_0(t)s^{N-1} + c_1(t)s^{N-2} + \cdots + c_{N-1}(t)}{s^N + d_1 s^{N-1} + \cdots d_N}, \tag{2.2}$$

где $d_1, \ldots, d_N$ – вещественные числа; $c_0(t), \ldots, c_{N-1}(t)$ - вещественные непрерывные функции аргумента t и функция

$$F(s,t) = G(s,t)Y(s)$$

удовлетворяет условиям леммы Жордана [6]. Тогда решение $x(t)$ может быть найдено с применением теории вычетов по формуле [5]

$$x(t) = \sum Res\,[F(s,t)exp(st)].$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.1) можно представить в виде

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t). \tag{2.3}$$

Здесь:

$$x_{св}(t) = \sum_{s_F \in S_G} Res\big[F(s,t)exp(st)\big], \tag{2.4}$$

где s_F – полюса функции $F(s, t)$, S_G – множество всех полюсов функции $G(s, t)$;

$$x_{вын}(t) = \sum_{s_F \in S_Y} Res\big[F(s,t)exp(st)\big], \tag{2.5}$$

где S_Y - множество всех полюсов функции $Y(s)$. При этом предполагается

$$S_G \cap S_Y = \varnothing,$$

где $\varnothing$ - пустое множество.

Функция $x(t)$, найденная по формуле (2.3), является частным решением уравнения (1.1), удовлетворяющим начальным условиям (2.1). Поэтому, положив

$$\varphi(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t),$$

с учетом (1.3) общее решение уравнение (1.1) можно представить в виде

$$x_{общ}(t) = \xi(t) + x_{св}(t) + x_{вын}(t), \tag{2.6}$$

или в виде [7],

$$x_{общ}(t) = \xi(t) + x_{вын}(t). \tag{2.7}$$

Однако, как показано ниже, возможны особые случаи, не рассмотренные в [3].

2.1. Рассмотрим уравнение вида

$$\begin{gathered}[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \cdots + b_n(t)]\,x(t) = \big[a_0(t)p^{n-1} + a_1(t)p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(t)\big]f(t),\\ p = \frac{d}{dt}, \quad t \in [0, T),\end{gathered} \tag{2.8}$$

где функция вида (1.2); $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ – преобразуемые по Лапласу непрерывные функции; $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ – вещественные аналитические функции аргумента t; $T \leq \infty$.

Пусть требуется найти общее решение этого уравнения.
Положив

$$y(t)=\left[a_0(t)p^{n-1}+a_1(t)p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(t)\right]f(t), \tag{2.9}$$

уравнение (2.9) сведем к уравнению (1.1), рассмотренному выше.
Пример 1. Найдём общее решение уравнения

$$\left(p^2+\frac{2}{t+a}p-b^2\right)\cdot x(t)=\left[(t+1)p+2t\right]\cdot f(t),\quad t\in[0,\infty), \tag{2.10}$$

где $a > 0$;

$$f(t)=\begin{cases}1, \ при\ t\geq 0;\\ 0, \ при\ t<0.\end{cases} \tag{2.11}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система функций

$$\xi_j(t)=\frac{a}{t+a}\cdot exp\left[(-1)^{j-1}bt\right],\quad j=1,2,$$

является фундаментальной системой решений уравнения

$$\left(p^2+\frac{2}{t+a}p-b^2\right)\cdot x(t)=0,\quad \forall(t>-a). \tag{2.12}$$

Отсюда общее решение уравнения (2.12) согласно (1.5) имеет вид

$$\xi(t)=\frac{a}{t+a}\cdot\left[C_1\,exp(bt)+C_2\,exp(-bt)\right]. \tag{2.13}$$

Положив

$$y(t)=\left[(t+1)p+2t\right]f(t), \tag{2.14}$$

уравнение (2.10) запишем в виде

$$\left(p^2+\frac{2}{t+a}p-b^2\right)\cdot x(t)=y(t),\quad t\in(0,\infty]. \tag{2.15}$$

Согласно [1] передаточная функция для уравнения (2.15) имеет вид

$$G(s,t)=\frac{s^2-\dfrac{2}{t+a}s-b^2}{(s+b)^2\cdot(s-b)^2}. \tag{2.16}$$

Преобразовав по Лапласу функцию (2.14), получим

$$L\left[y(t)\right]=\frac{s^2+2}{s^2}. \tag{2.17}$$

С учетом (2.16) и (2.17) по формуле (2.5) найдем

$$x_{вын}(t)=Re\,s\left[\frac{s^2-\dfrac{2}{t+a}s-b^2}{(s+b)^2\cdot(s-b)^2}\cdot\frac{s^2+2}{s^2}\right]_{s=0}=-\frac{4}{b^4(t+a)}-\frac{2t}{b^2}.$$

Теперь по формуле (2.7) находим общее решение уравнения (2.10)

$$x_{общ}(t)=\frac{a}{t+a}\cdot\left[C_1\,exp(bt)+C_2\,exp(-bt)\right]-\frac{4}{b^4(t+a)}-\frac{2t}{b^2}.$$

2.2. Пусть теперь

$$S_G\cap S_Y\neq\varnothing.$$

Для простоты рассуждений положим, среди полюсов функции $G(s,t)$ существует полюс s_1 кратности k, причем этот полюс совпадает с одним из полюсов функции $Y(s)$. Тогда функцию $G(s,t)$ можно представить в виде

$$G(s,t)=\frac{1}{(s-s_1)^k}\cdot G_1(s,t). \tag{2.18}$$

Обозначив

$$Y_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)^k} \cdot Y(s), \tag{2.19}$$

функцию $F(s, t)$ представим в виде

$$F(s, t) = G_1(s, t)Y_1(s).$$

Отсюда следует, что

$$S_{G1} \cap S_{Y1} = \varnothing,$$

и вынужденную составляющую $x_{1вын}(t)$ можно рассчитать по формуле

$$x_{1\,вын}(t) = \sum_{s_F \in S_{Y1}} Res\, F(s,t). \tag{2.20}$$

Тогда общее решение (1.3) уравнения (1.1) можно представить в виде

$$x_{общ}(t) = \xi(t) + x_{1вын}(t). \tag{2.21}$$

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$\left(p^2 + \frac{2}{t+a}p - b^2\right) \cdot x(t) = y(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{2.22}$$

где $a > 0$, в случае $y(t) = exp(bt)$.

Уравнению (2.22) соответствует однородное уравнение (2.12), общее решение которого имеет вид (2.13), а передаточная функция имеет вид (2.16) (см. пример 1).

Преобразовав по Лапласу функцию y(t), получим

$$Y(s) = L[exp(bt)] = \frac{1}{s-b}. \tag{2.23}$$

Передаточная функция $G(s, t)$ имеет двукратный полюс $s_1 = b$ (см. (2.16)), который совпадает с полюсом функции $Y(s)$. Тогда согласно (2.18) и (2.19) имеем

$$G_1(s,t) = \frac{s^2 - \frac{2}{t+a}s - b^2}{(s+b)^2}$$

и

$$Y_1(s) = \frac{1}{(s-b)^2} \cdot \frac{1}{s-b}.$$

Отсюда по формуле (2.20) найдем

$$x_{1вын}(t) = \frac{1}{2} \lim_{s \to b} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \frac{s^2 - \frac{2}{t+a}s - b^2}{(s+b)^2} \cdot exp(st) =$$
$$\left[\frac{1}{(2b)^3(t+a)} - \frac{1}{(2b)^2} + \frac{t}{2b} - \frac{t^2}{4b(t+a)}\right] \cdot exp(bt). \tag{2.24}$$

Теперь с учетом (2.13) и (2.24) по формуле (2.21) находим общее решение уравнения (2.22)

$$x_{общ}(t) = \frac{a}{t+a} \cdot [C_1\, exp(bt) + C_2\, exp(-bt)] +$$
$$\left[\frac{1}{(2b)^3(t+a)} - \frac{1}{(2b)^2} + \frac{t}{2b} - \frac{t^2}{4b(t+a)}\right] \cdot exp(bt).$$

3. Заключение

Уточнены алгоритмы расчета частного решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, предложенные в статье [3]. Это позволяет во многих особых случаях сократить объем вычислений (по сравнению с объемом вычислений в известных методах).

Литература:

1. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем. М.: Машиностроение, 1977. -296 с.
2. Михайлов Ф.А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. М.: Наука, 1986. - 320 с.
3. Мальчик Ю.Н. Об одном способе отыскания общего решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. // Наука и новые технологии. № 1. Бишкек: 2011.
4. Blank Ch. Sur les equation differentielles lineaires a coeffietients lentement variable, - Bull, technique de la Suisse romande, 1948. v.74. № 15, p. 182-189.

5. Zadeh L.A. Circuit analysis of linear varying-parameter networks. - Journ. Applied Physics, 1950, v.21, № 16, p. 1171 - 1177.
6. Анго А. математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. - 780 с.
7. Мальчик Ю.Н. Об одном способе отыскания приближенной формулы общего решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами.//Депонированная рукопись № 515 от 26.09.90 г. Фрунзе: РНТБ Кирг. Госплана Кирг.ССР. 1990. - 25 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Усманов С.Ф.