МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТЕХНОЛОГИЯ. СЕЙСМОЛОГИЯ

Канетов Б.Э.

О μ-ПОЛНОТЕ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

B.E. Kanetov

ON μ-COMPLETE OF UNIFORM SPACE

УДК:515.12

В настоящей статье исследуются μ-полнота по Дьёдонне пространств и некоторые свойства наростов равномерных пространств.

In this article the μ-complete of Dieudonne space and some properties remainder of uniform space we are studied.

В настоящей статье все топологические пространства предполагаются тихоновскими, их отображения непрерывными; равномерные пространства отделимыми, а их отображения равномерно непрерывными.

Пусть (X,U) - равномерное пространство и $\varphi_\mu(U)$ - множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X,U), каждое из которых имеет базу мощности $\leq \mu$. Пусть $U(X)$ - множество всех равномерностей на множестве X. Две равномерности U и V будем говорить эквивалентными $U \sim V$, если $\varphi_\mu(U)=\varphi_\mu(V)$. Положим $E_\mu(U)=\{V \in U(X) : U \sim V\}$. Ясно, что $E_\mu(U)$ является частично упорядоченным отношением.

Нормальную последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X будем называть $\varphi_\mu(U)$-нормальной, если $\alpha_n \cap F \neq \varnothing$ для любых $F \in \varphi_\mu(U)$ и $n \in N$.

Для любой равномерности U на множестве X множество $E_\mu(U)$ имеет наибольший элемент. В самом деле, если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ две $\varphi_\mu(U)$-нормальные последовательности покрытий множества X, то легко видеть, что $\{\alpha_n \wedge \beta_n\}$ также является $\varphi_\mu(U)$-нормальной последовательностью покрытий множества X. Следовательно, система U_{φ_μ} всех $\varphi_\mu(U)$-нормальных последовательностей покрытий множества X является равномерностью на множестве X. Ясно, что эта равномерность сильнее чем равномерности U и $\varphi_\mu(U)=\varphi_\mu(U_{\varphi_\mu})$. Теперь покажем, что U_{φ_μ} наибольший элемент множества $E_\mu(U)$. Пусть V произвольный элемент множества $\varphi_\mu(U)$ и γ произвольное равномерное покрытие из V. Тогда существует нормальная последовательность покрытий $\{\gamma_n\}$ из V такая, что $\gamma=\gamma_1$. $\{\gamma_n\}$ - $\varphi_\mu(U)$-нормальная последовательность покрытий, так как $\varphi_\mu(U)=\varphi_\mu(V)$. Следовательно, $\{\gamma_n\} \subset U_{\varphi_\mu}$. Значит, $V \subset U_{\varphi_\mu}$.

Наибольший элемент U_{φ_μ} частично упорядоченного множества $E_\mu(U)$ будем называть φ_μ-лидером равномерности U. Равномерное пространство (X,U) называется предуниверсальным, если $U=U_{\varphi_\mu}$.

ТЕОРЕМА 1. Равномерное пространство (X,U) является предуниверсальным тогда и только тогда, когда μ-пополнение $(\widetilde{X}_\mu,\widetilde{U}_\mu)$ равномерного пространства (X,U) является универсальным пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть V такая равномерность на X, что $\varphi_\mu(\tilde{U}_\mu) = \varphi_\mu(\tilde{V}_\mu)$. $\varphi_\mu(\tilde{U}_\mu)$ состоит из всех фильтров окрестностей точек пространства $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$, так как $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ μ-полное пространство. Естественно $\varphi_\mu(U)$ состоит из следов на X фильтров из $\varphi_\mu(\tilde{U}_\mu)$. Поэтому $\varphi_\mu(U) = \varphi_\mu(V)$, где V - равномерность на X, индуцированная равномерностью $\tilde{V}_\mu$. Легко видеть, что $\tilde{V}_\mu \subset \tilde{U}_\mu$. Итак, μ-пополнение $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ является универсальным пространством.

Необходимость. Пусть μ-пополнение $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ равномерного пространства (X, U) является универсальным пространством. Покажем, что $U = U_{\varphi_\mu}$. Пусть $\alpha \in U_{\varphi_\mu}$ - произвольное открытое равномерное покрытие. Тогда оно распространяется до открытого покрытия $\tilde{\alpha}_\mu = \{\tilde{A}_\mu : A \in \alpha\}$, $\tilde{A}_\mu = \tilde{X}_\mu \setminus [X \setminus A]_{\tilde{X}_\mu}$ пространства $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$. Легко видеть, что система $\{\tilde{\alpha}_\mu : \alpha \in U_{\varphi_\mu}\}$ образует базу некоторой равномерности $\tilde{U}_{\varphi_\mu}$ на $\tilde{X}_\mu$. $\tilde{U}_{\varphi_\mu} = \tilde{U}_\mu$, так как $\tilde{U}_\mu$ универсальная равномерность. Следовательно, $U = U_{\varphi_\mu}$.

Топологическое пространство X будем называть μ-полным по Дьёдонне, если на нем существует μ-полная равномерность. Топологическое пространство X μ-полно по Дьёдонне тогда и только тогда, когда универсальная равномерность пространства X μ-полна.

Пусть $D_\mu(X)$ - множество всех μ-полных по Дьёдонне расширений, а $U_{D_\mu}(X)$ - множество всех предуниверсальных равномерностей тихоновского пространства X. Множество $D_\mu(X)$ частично упорядочено относительно порядка "$\leq$", а множество $U_{D_\mu}(X)$ частично упорядочено по включению "$\subset$".

ТЕОРЕМА 2. Для любого тихоновского пространства X частично упорядоченные множества $D_\mu(X)$ и $U_{D_\mu}(X)$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $F_\mu : U_{D_\mu}(X) \to D_\mu(X)$ определено по формуле $F_\mu(U) = t_U X$, где $U \in U_{D_\mu}(X)$, а $t_U X$ - расширение тихоновского пространства X, полученное как μ-пополнение пространства X. Ясно, что $F_\mu(U) \in D_\mu(X)$. Так как μ-пополнение $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ пространства (X, U) определено единственным образом, то F_μ определено корректно. Покажем взаимно однозначности отображения F_μ. Пусть $U, V \in U_{D_\mu}(X)$ две различные равномерности. Пусть $F(V) = t_U(X)$. Предположим, что $F_\mu(U) = F_\mu(V)$. Тогда существует такое $f_\mu : t_U X \to t_V X$, что $f \circ t_U = t_V$. Пусть $\tilde{U}_\mu$ и $\tilde{V}_\mu$ - универсальные равномерности пространств $t_U X$ и $t_V X$ соответственно. Заметим, что $U = \{t_U^{-1}\tilde{\alpha}_\mu : \tilde{\alpha}_\mu \in \tilde{U}_\mu\}$ и $V = \{t_U^{-1}\tilde{\beta}_\mu : \tilde{\beta}_\mu \in \tilde{V}_\mu\}$. $f_\mu : (t_U X, \tilde{U}_\mu) \to (t_V X, \tilde{V}_\mu)$ равномерный изоморфизм, так как $f_\mu : t_U X \to t_V X$ - гомеоморфизм, а $\tilde{U}_\mu$ и $\tilde{V}_\mu$ - универсальные равномерности. Отсюда следует, что $U = V$. Пришли к противоречию. Итак, $F_\mu(U) \neq F_\mu(V)$.

Далее покажем сюръективности отображения F_μ. Пусть $tX \in D_\mu(X)$ и $\tilde{U}_\mu$ - универсальная равномерность на нем. Положим $U = \{t^{-1}\tilde{\alpha}_\mu : \tilde{\alpha}_\mu \in \tilde{U}_\mu\}$. Заметим, что U - предуниверсальная равномерность на X. Легко видеть, что $(tX, \tilde{U}_\mu)$ является μ-пополнением равномерного пространства (X, U). Следовательно, $F_\mu(U) = tX$.

Теперь остается показать, что отображение $F_\mu : (U_{D_\mu}(X), \subset) \to (D_\mu(X), \leq)$ - изоморфизм. Пусть $U, V \in U_{D_\mu}(X)$ такие, что $V \subset U$. Пусть $F_\mu(U) = t_U X$, $F_\mu(V) = t_V X$. Пусть $(t_U X, \widetilde{U}_\mu)$ - μ-пополнение пространства (X, U), $(t_V X, \widetilde{V}_\mu)$ - μ-пополнение пространства (X, V). Ясно, что тождественное отображение $i_X : (X, U) \to (X, V)$ равномерно непрерывно. Тогда существует такое равномерно непрерывное отображение $f_\mu : (t_U X, \widetilde{U}_\mu) \to (t_V X, \widetilde{V}_\mu)$, что $f_\mu \circ t_U = t_V$. Отсюда следует, что $t_V X \leq t_U X$. Обратно, пусть $t_V X \leq t_U X$. Тогда существует такое непрерывное отображение $f_\mu : t_U X \to t_V X$, что $f_\mu \circ t_U = t_V$. Если $\widetilde{U}_\mu$ и $\widetilde{V}_\mu$ - универсальные равномерности пространств $t_U X$, $t_V X$ соответственно, то отображение $f_\mu : (t_U X, \widetilde{U}_\mu) \to (t_V X, \widetilde{V}_\mu)$ равномерно непрерывно. Так как $f_\mu \circ t_U = t_V$ и $U = \{t_U^{-1}\tilde{\alpha}_\mu : \tilde{\alpha}_\mu \in \widetilde{U}_\mu\}$ и $V = \{t_U^{-1}\tilde{\beta}_\mu : \tilde{\beta}_\mu \in \widetilde{V}_\mu\}$, то $V \subset U$. Следовательно, отображение $F_\mu : (U_{D_\mu}(X), \subset) \to (D_\mu(X), \leq)$ является изоморфизмом.

Напомним, что равномерное пространство (X, U) называется μ-полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий базу B мощностью $\leq \mu$ сходится.

Равномерное пространство $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ называется μ-пополнением равномерного пространства (X, U), если: 1) $X \subset \widetilde{X}_\mu$; 2) (X, τ_U) всюду плотно в $(\widetilde{X}_\mu, \tau_{\widetilde{U}_\mu})$; 3) $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ - μ-полное равномерное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка x равномерного пространства (X, U) называется точкой его локальной μ-полноты, если существуют открытая окрестность O точки x и μ-полное подпространство (M, U_M) равномерного пространства (X, U) такие, что $x \in M \subset O$.

Множество всех точек локальной μ-полноты равномерного пространства (X, U) обозначается через $\tilde{A}_\mu(\tilde{O})$. Равномерное пространство (X, U) называется локально μ-полным, если $X = \tilde{A}_\mu(\tilde{O})$.

Наростом равномерного пространства (X, U) относительно μ-пополнения $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ называется, дополнение данного пространства до его μ-пополнения $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$. Нарост будем обозначать через $(\widetilde{X}_\mu \setminus X, \widetilde{U}_{\widetilde{X}_\mu \setminus X})$.

ТЕОРЕМА 3. Нарост $(\widetilde{X}_\mu \setminus X, \widetilde{U}_{\widetilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является μ-полным, тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U) является локально μ-полным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть нарост $(\widetilde{X}_\mu \setminus X, \widetilde{U}_{\widetilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является μ-полным. Тогда он является замкнутым в μ-пополнении $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$. Отсюда следует, что пространство (X, U) является открытым в μ-пополнении $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$. Легко видеть, что (X, U) является локально μ-полным.

Достаточность. Пусть равномерное пространство (X, U) локально μ-полно. Тогда легко видеть, что оно открыто лежит в μ-пополнении $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$. Следовательно, нарост $(\widetilde{X}_\mu \setminus X, \widetilde{U}_{\widetilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является μ-полным как замкнутое подпространство μ-полного пространства $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство α подмножеств пространства (X, U) называется μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U), если $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого свободного фильтра Коши, имеющего базу мощностью $\leq \mu$.

ТЕОРЕМА 4. Нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является предкомпактным в том и только том случае, если каждое равномерное покрытие α содержит конечное подсемейство α^0, являющееся μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ предкомпактен и α - произвольное равномерное покрытие равномерного пространства (X, U). Тогда равномерное покрытие α распространяется до равномерного покрытия $\tilde{\alpha}_\mu = \{\tilde{A}_\mu; A \in \alpha\}$, где $\tilde{A}_\mu = \tilde{X}_\mu \setminus [X \setminus A]_{\tilde{X}_\mu}$ пространства $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$. Положим $\hat{\alpha}_\mu = \tilde{\alpha}_\mu \wedge \{\tilde{X}_\mu \setminus X\}$. Ясно, что семейство $\hat{\alpha}_\mu$ является равномерным покрытием пространства $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Из равномерного покрытия $\hat{\alpha}_\mu$ можно выделить конечное подпокрытие $\hat{\alpha}^0_\mu$. Тогда равномерное покрытие α содержит такое конечное подсемейство $\alpha^0 = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, что $\tilde{\alpha}^0_\mu \wedge \{\tilde{X}_\mu \setminus X\} = \hat{\alpha}^0_\mu$. Покажем, что α^0 является μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U). Пусть F - произвольный свободный фильтр Коши, имеющий базу мощностью $\le \mu$. Он сходится к некоторой точке $x \in \tilde{X}_\mu \setminus X$. Обозначим $\tilde{F}_x$ фильтр окрестностей точки x. Он имеет базу $\tilde{B}_x$, мощностью $\le \mu$. Тогда существует такой номер $i_0 \le n$, что $\tilde{A}^0_{i_0(\mu)} \in \tilde{\alpha}^0_{i_0(\mu)} \cap \tilde{F}_x$. Заметим, что след на (X, U) фильтра $\tilde{F}_x$ совпадает с фильтром Коши F. Следовательно, $\alpha^0 \cap F \ne \varnothing$. Значит, α^0 - μ-ко-покрытие равномерного пространства (X, U).

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является предкомпактным. Пусть $\hat{\beta}_\mu$ - произвольное равномерное покрытие нароста $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Тогда существует такое равномерное покрытие β пространства (X, U), что $\tilde{\beta}_\mu \wedge \{\tilde{X}_\mu \setminus X\} = \hat{\beta}_\mu$. Равномерное покрытие β содержит конечное подсемейство β^0, являющееся μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U). Легко видеть, что $\hat{\beta}^0_\mu$ является конечным подпокрытием равномерного покрытия $\hat{\beta}_\mu$ пространства $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Следовательно, нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ предкомпактен.

ТЕОРЕМА 5. Нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) является τ-ограниченным тогда и только тогда, когда каждое равномерное покрытие α содержит подсемейство α^0 мощности $\le \tau$, которое является μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с незначительными изменениями аналогично доказательство теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. Для того чтобы нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) имел равномерную размерность $\dim \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X} \le n$ необходимо и достаточно, чтобы каждое равномерное покрытие α содержало подсемейство α^0 кратности $\le n+1$, являющегося μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\dim \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X} \le n$ и α - произвольное равномерное покрытие пространства (X, U). Ясно, что $\tilde{\alpha}_\mu = \{\tilde{A}_\mu; A \in \alpha\}$, где $\tilde{A}_\mu = \tilde{X}_\mu \setminus [X \setminus A]_{\tilde{X}_\mu}$ является равномерным покрытием пополнения $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ и след $\hat{\alpha}_\mu = \tilde{\alpha}_\mu \wedge \{\tilde{X}_\mu \setminus X\}$ этого покрытия на $\tilde{X}_\mu \setminus X$ является равномерным покрытием нароста $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Пусть $\hat{\alpha}^0_\mu$ - подпокрытие покрытия $\hat{\alpha}_\mu$.

Так как нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ обладает размерностью $\le n$, то покрытие $\hat{\alpha}_\mu^0$ имеет кратность $\le n+1$. Тогда подсемейство α^0 имеет кратность $\le n+1$. Легко показать, что α^0 является μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U).

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Покажем, что $\dim \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X} \le n$. Пусть $\hat{\gamma}_\mu$ - произвольное равномерное покрытие нароста $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Тогда существует такое равномерное покрытие γ пространства (X, U), что $\tilde{\gamma}_\mu \wedge \{\tilde{X}_\mu \setminus X\} = \hat{\gamma}_\mu$. Равномерное покрытие γ содержит подсемейство γ^0 кратности $\le n+1$, являющегося μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U). Тогда легко видеть, что покрытие $\hat{\gamma}_\mu^0$ имеющая кратность $\le n+1$ будет вписанным в равномерное покрытие $\hat{\gamma}_\mu$ пространства $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$. Итак, $\dim \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X} \le n$.

СЛЕДСТВИЕ. Для того чтобы нарост $(\tilde{X}_\mu \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X}_\mu \setminus X})$ равномерного пространства (X, U) был нульмерным, необходимо и достаточно, чтобы каждое равномерное покрытие α содержало дизъюнктное подсемейство α^0, являющегося μ-ко-покрытием равномерного пространства (X, U).

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990, 172 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986, 752с.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.А.