Канетов Б.Э.

О μ-ПОЛНОТЕ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

B.E. Kanetov

ON μ-COMPLETE OF UNIFORM CONTINUOUS MAPPINGS

УДК:515.12

В настоящей статье исследуются μ-полнота равномерно непрерывных отображений.

In this paper μ-complete of uniform continuous mappings we are studied.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется μ-полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий базу B мощностью $\leq\mu$, для которого fF сходится в (Y,V), сходится в (X,U), где $\aleph_0\leq\mu\leq\tau$, $\tau=w(f)$.

Здесь $w(f)$ означает вес равномерно непрерывного отображения. Весом равномерно непрерывного отображения f называется наименьшее кардинальное число τ, являющееся мощностью какой либо базы U_f отображения f.

При $\mu=\tau$, отображение f называется полным.

Напомним, что равномерное пространство (X,U) называется μ-полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий базу B мощностью $\leq\mu$ сходится.

Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерно непрерывное отображение μ-полного равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V), то отображение f - μ-полно, обратно, если отображение f равномерного пространство (X,U) в одноточечное равномерное пространство $Y=\{y\}$ μ-полно, то равномерное пространство (X,U) μ-полно.

ТЕОРЕМА 1. Если равномерно непрерывное отображение f и равномерное пространство (X,U) - μ-полны, то равномерное пространство (X,U) тоже μ-полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть f и (X,U) - μ-полны. Пусть F-произвольный фильтр Коши пространства (X,U), имеющий базу мощностью $\leq\mu$. Тогда fF является базой некоторого фильтра Коши F_Y равномерного пространства (Y,V). Легко видеть, что последнее имеет базу B_Y мощностью $\leq\mu$. Равномерное пространство (Y,V) μ-полно, то F_Y сходится в (Y,V). В силу μ-полноты отображения f фильтр Коши F также сходится в (X,U). Итак, равномерное пространство (X,U) μ-полно.

Равномерное пространство $(\tilde{X}_\mu,\tilde{U}_\mu)$ называется μ-пополнением равномерного пространства (X,U), если: 1) $X\subset\tilde{X}_\mu$; 2) (X,τ_U) всюду плотно в $(\tilde{X}_\mu,\tau_{\tilde{U}_\mu})$; 3) $(\tilde{X}_\mu,\tilde{U}_\mu)$ - μ-полное равномерное пространство. Рассмотрим следующий квадрат в категории $Unif$.

$$\begin{array}{ccc}(X,U)&\to&(\tilde{X},\tilde{U})\\ f\downarrow&&\downarrow\tilde{f}\\ (Y,V)&\to&(\tilde{Y},\tilde{V})\end{array}\qquad(1)$$

ТЕОРЕМА 2. Для равномерно непрерывного отображения $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) на равномерное пространство (Y,V) следующие условия равносильны:

1) Отображение f μ-полно;

2) $\tilde{f}(\tilde{X}\setminus X)\subset\tilde{Y}\setminus Y$;

3) Квадрат (1) декартов в категории $Unif$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(1)\Rightarrow(2)$. Пусть $f:(X,U)\to(Y,V)$ - μ-полное отображение. Покажем справедливость включения $\tilde{f}(\tilde{X}\setminus X)\subset\tilde{Y}\setminus Y$. Пусть $y\notin\tilde{Y}\setminus Y$. Тогда $y\in Y$. Пусть $x\in X$ такая точка, что $\tilde{f}(x)=y$. Следовательно, $x\notin\tilde{X}\setminus X$ и $y\notin\tilde{f}(\tilde{X}\setminus X)$. Пусть $x\in\tilde{X}\setminus X$. Через $B(x)$

обозначим фильтр окрестностей точки $x \in \widetilde{X} \setminus X$ в μ-пополнении $(\widetilde{X}, \widetilde{U})$. Рассмотрим след F фильтра окрестностей $B(x)$ на (X, U). Из конструкции μ-пополнения равномерного пространства (X, U) следует, что F является свободным фильтром Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$. Ясно, что его образ fF сходится к некоторой точке y. В силу μ-полноты отображения $f:(X, U) \to (Y, V)$ F обязательно сходится к некоторой точке $z \in X$, а это противоречит свободности фильтра Коши F обладающий базу мощности $\leq \mu$. Поэтому $x \in X$. Следовательно, $\widetilde{f}(\widetilde{X} \setminus X) \subset \widetilde{Y} \setminus Y$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть выполнено условие (2). Пусть $g:(Z, W) \to (Y, V)$ и $h:(Z, W) \to (\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ такие равномерно непрерывные отображения, что $\widetilde{f} \circ h = i_Y \circ g$. Пусть i_X и i_Y тождественные отображения. Тогда можно определить отображение $\varphi: Z \to X$ по правилу $\varphi(z) = h(z)$ для любого $z \in Z$. Из условие (2) и из равенства $\widetilde{f} \circ h = i_Y \circ g$ следует, что $h(Z) \subset X$. Легко видеть, что $h = i_X \circ \varphi$ и $g = f \circ \varphi$. Так как на множестве $h(Z)$ равномерности U и $\widetilde{U}_\mu$ индуцируют одну и ту же равномерность, то из равномерной непрерывности отображения h следует равномерная непрерывность отображения φ. Из определения отображения φ легко следует его единственность. Итак, квадрат (1) декартов в категории $Unif$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть выполнено условие (3) и F - такой фильтр Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$, что образ fF сходится к некоторой точке y пространства (Y, V). Ясно, что фильтр Коши F которое имеет базу мощности $\leq \mu$ является базисом фильтра Коши в μ-пополнении $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ пространства (X, U). Тогда фильтр Коши F сходится к некоторой точке $x \in \widetilde{X}_\mu$. Покажем, что фильтр Коши F сходится в (X, U), т.е. $x \in X$. Пусть (Z, W) одноточечное равномерное пространство. Определим отображение $g:(Z, W) \to (Y, V)$ и $h:(Z, W) \to (X, U)$ так, чтобы $g(x) = x$, $h(x) = y$. Так как $\widetilde{f}(x) = y$, то $\widetilde{f} \circ h = i_Y \circ g$. Тогда найдется такое единственное отображение $\varphi:(Z, W) \to (X, U)$, что $i_X \circ \varphi = h$ и $f \circ \varphi = g$, но $i_X(\varphi(x)) = h(x) = x$. Следовательно, $x \in X$. Значит, фильтр Коши F имеющий базу мощности $\leq \mu$, сходится в (X, U).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f:(X, U) \to (Y, V)$ μ-полное отображение равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V),то $(f^{-1}y, U_{f^{-1}y})$ - μ-полное подпространство для любого $y \in Y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f:(X, U) \to (Y, V)$ - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V). Равномерно непрерывное отображение $\hat{f}:(\hat{X}, \hat{U}) \to (Y, V)$ равномерного пространства $(\hat{X}, \hat{U})$ в равномерное пространство (Y, V) называется μ-пополнением отображения f, если выполняются следующие условия:

1) равномерное пространство (X, U) - всюду плотное равномерное подпространство равномерного пространства $(\hat{X}, \hat{U})$.

2) $f = \hat{f}|_X$. 3)отображение $\hat{f}_\mu$ является μ-полным.

ТЕОРЕМА 3. Всякое равномерно непрерывное отображение $f:(X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V) имеет единственное, с точностью до равномерного изоморфизма, пополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu)$ и $(\widetilde{Y}_\mu, \widetilde{V}_\mu)$ - μ-пополнения равномерных пространств (X, U) и (Y, V). Пусть $\widetilde{f}_\mu:(\widetilde{X}_\mu, \widetilde{U}_\mu) \to (Y, V)$ - единственное равномерно непрерывное продолжение отображения f. Положим $\hat{X}_\mu = \tilde{f}^{-1}Y$ и $\hat{f}_\mu = \tilde{f}_\mu |_{\hat{X}_\mu}$. Тогда $X \subset \hat{X}_\mu$ и $\hat{f}|_X = f$. Пусть $\hat{U}_\mu$ равномерность индуцированная равномерностью $\tilde{U}_\mu$. Тогда отображение $\hat{f}_\mu : (\hat{X}_\mu, \hat{U}_\mu) \to (Y, V)$ равномерно непрерывно. Равномерное пространство $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$ является μ-пополнением равномерного пространства $(\hat{X}_\mu, \hat{U}_\mu)$ и $\hat{f}$ единственное равномерно непрерывное продолжение отображения f, так как $\tilde{f}$ единственно. Заметим, что $\tilde{f}(\tilde{X} \setminus \hat{X}) \subset \tilde{Y} \setminus Y$. Следовательно, согласно теореме 1 отображение $\hat{f}_\mu$ μ-полно.

ТЕОРЕМА 4. Композиция двух μ-полных отображений снова является μ-полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$ - μ-полное отображение равномерного пространства (X, U) на равномерное пространство (Y, V) и $g : (Y, V) \to (Z, W)$ - μ-полное отображение равномерного пространства (Y, V) на равномерное пространство (Z, W). Пусть F произвольный фильтр Коши пространства (X, U), имеющий базу мощности $\le \mu$. Тогда в силу μ-полноты отображения f образ fF сходится в (Y, V). Легко видеть, что fF фильтр Коши пространства (Y, V), имеющий базу мощности $\le \mu$. В своё очередь в силу μ-полноты отображения g фильтр Коши $g(fF)$ сходится в (Z, W). Отсюда следует, что фильтр Коши $(g \circ f)^{-1} F$ сходится , тогда тем более сходится фильтр Коши F в (X, U). Следовательно, равномерно непрерывное отображение $g \circ f : (X, U) \to (Z, W)$ - μ-полно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$ - μ-полное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) и (M, U_M) замкнутое подпространство пространства (X, U). Тогда сужение $f|_M : (M, U_M) \to (Y, V)$ тоже является μ-полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение f - μ-полно и (M, U_M) замкнутое подпространство пространства (X, U). Пусть F_M такой фильтр Коши пространства (M, U_M), которое имеет базу мощности $\le \mu$. Тогда существует такой фильтр Коши F пространства (X, U), имеющий базу мощности $\le \mu$, что $F_M = F \wedge \{M\}$. Образ fF фильтра Коши F сходится в (Y, V) в силу μ-полноты отображения. Тогда сходится и фильтр Коши $f|_M\ F_M$ в (Y, V). Отсюда следует сходимость фильтра Коши F_M в (X, U). Так как (M, U_M) замкнутое подпространство, то предел фильтра Коши F_M лежит в (M, U_M). Значит, отображение $f|_M$ μ-полно.

ТЕОРЕМА 5. Равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) μ-полно в том и только том случае, если X замкнуто в μ-пополнении $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) μ-полно. Тогда из конструкции μ-пополнения равномерно непрерывного отображения следует, что $f = \hat{f}_\mu$, $X = \hat{X}_\mu$. Следовательно, X замкнуто в $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$. Обратно. Пусть X замкнуто в μ-пополнении $(\tilde{X}_\mu, \tilde{U}_\mu)$. Пусть $\hat{f}_\mu : (\hat{X}_\mu, \hat{U}_\mu) \to (Y, V)$ μ-пополнения равномерно непрерывного отображения $f : (X, U) \to (Y, V)$. Тогда равномерно непрерывное отображение $\hat{f}|_X : (X, U) \to (Y, V)$ μ-полное как сужение μ-полного отображения на замкнутое подпространство. Итак, равномерно непрерывное отображение $f : (X, U) \to (Y, V)$ равномерного пространства (X, U) в равномерное пространство (Y, V) μ-полно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство (Y,V) называется локально μ-полным в точке $x\in X$, если существуют открытое подмножество B и замкнутое подпространство (M,U_M) пространства (X,U) такие, что $x\in B\subset M$ и сужение $f|_M$ отображения f μ-полно.

Всякое μ-полное равномерно непрерывное отображение является локально μ-полным равномерно непрерывным отображением.

Точка $x\in X$ называется точкой μ-полноты равномерного пространства (X,U), если существуют открытое в (X,U) подмножество A и μ-полное подпространство N равномерного пространства (X,U) такие, что $x\in A\subset N$. Если каждая точка равномерного пространства является точкой его локальной μ-полноты, то равномерное пространство называется локально μ-полным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если равномерное пространство (X,U) локально μ-полно, то равномерно непрерывное отображение $f:(X,U)\to(Y,V)$ является локально μ-полным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть равномерное пространство (X,U) локально μ-полно, $f:(X,U)\to(Y,V)$ - равномерно непрерывное отображение и x произвольная точка равномерного пространства (X,U). Пусть B открытое подмножество и (M,U_M) замкнутое подпространство пространства (X,U) такие, что $x\in B\subset M$. Тогда легко видеть, что сужение $f|_M$ отображения f является локально μ-полным отображением.

ТЕОРЕМА 6. Равномерно непрерывное отображение f является локально μ-полным отображением тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X,U) является открытым подпространством равномерного пространства $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f - локально μ-полное отображение и $\hat{f}_\mu$ - его μ-пополнение. Пусть $x\in X$ произвольная точка. Тогда существуют такие открытое подмножество B и замкнутое подпространство (M,U_M), что $x\in B\subset M$ и $f|_M$ - μ-полно. Заметим, что M замкнуто в равномерном пространстве $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$. Отсюда следует, что $[B]_{\hat{X}}\subset[M]_{\hat{X}}=M\subset X$. Пусть $\hat{B}=\hat{X}\setminus[X\setminus B]_{\hat{X}}$. Тогда $\hat{X}\setminus X\subset[X\setminus B]_{\hat{X}}$ и $\hat{O}\setminus[O]_{\hat{X}}=\varnothing$. Следовательно, $\hat{O}=O$. Значит, (X,U) открыто в $(\hat{X}_\mu,\hat{U}_\mu)$.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы и $x\in X$ произвольная точка. Тогда существует такая открытая окрестность O точки $x\in X$, что $[O]\subset X$. Легко видеть, что сужение отображения f на $[O]$ μ-полно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f:(X,U)\to(Y,V)$ - μ-полно и N открытое, то сужение $f|_N:(N,U_N)\to(Y,V)$ локально μ-полно.

Литература:

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.
2. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств// В кн: Отображения и функторы, Москва, Изд. МГУ, 1984.

Рецензент: д.ф-м.н., профессор Чекеев А.А.