Сактанов У.А.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ СТЕРЖНЯ ПОЛИКРЕМНИЯ

U.A. Saktanov

NUMERICAL ALGORITHM OF STABILIZATION OF THE TEMPERATURE OF POLYSILICON ROD

УДК: 519.3:62–50

Показано, что решения вспомогательной системы типа Риккати в обыкновенных производных для линейной системы с распределенными параметрами имеют интервалы постоянства значений. Эти значения предложено использовать в алгоритме оптимального управления на конечном интервале времени, а затем в численном алгоритме стабилизирующего управления.

It is shown that decisions of the auxiliary system of the type Rikkati in ordenely derived for linear distributed parameter system have an intervals constancy importances. These importances is offered use in algorithm of optimal control for final time lag, and then in the numerical algorithm stabilizing control.

Введение. Данная работа продолжает исследование численных расчетов высокотемпературных режимов при выращивании стержней поликремния в реакторе водородного восстановления [1,2]. Применяются методы математической теории оптимального управления системами с сосредоточенными и распределенными параметрами с использованием обобщенного решения краевой задачи, описывающей управляемый процесс [3, 4].

В [3] сформулирована задача оптимальной стабилизации линейными системами с распределенными параметрами с критерием качества

$$J_0 = \int_0^1 [u(T,x) - \varphi(x)]^2 dx + \beta \int_0^\infty p^2(t)dt \qquad (1)$$

и предлагается решать ее, используя формулы синтеза оптимального управления на конечном интервале времени с критерием качества

$$J_1 = \int_0^1 [u(T,x) - \varphi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T p^2(t)dt \qquad (2)$$

с вспомогательными системами интегро-дифференциальных уравнений типа Риккати, полученными в [3, 4] относительно функций трех и двух переменных $K(t,x,s)$, $\varphi(t,x)$.

В данной работе для линейной СРП с управлением $p(t)$ в уравнении объекта сформулирована задача оптимальной стабилизации с критерием качества

$$J_2 = \xi_1 \int_0^\infty [u(t,1) - g]^2 dt + \beta \int_0^\infty p^2(t)dt, \qquad (3)$$

$$\xi_1 \rangle 0, \quad g = const$$

и предложен численный алгоритм стабилизации на основе вспомогательной системы типа Риккати относительно функций одной переменной $k_1(t)$, $\varphi_1(t)$.

Постановка задачи. Пусть процесс изменения температуры в однородном тонком стержне описывается линейным уравнением:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + q(x)p(t), \; t \rangle 0, \quad 0 \le x \le 1, \qquad (4)$$

с начальным и граничными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \; \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \; \lambda \frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \alpha(T_c - u(t,1)). \qquad (5)$$

Здесь $u(t,x)$ – температура стержня в момент времени t в точке «x»; функции $q(x)$, $u_0(x) \in L_2(0,1)$; постоянные a, λ заданы; T_c – температура окружающей среды; $p(t)$ – управляющая функция из класса допустимых, $p(t) \in L_2(0,\infty)$.

Под решением краевой задачи (4) – (5) понимается обобщенное решение в смысле В.И. Плотникова, используемое в [3, 4].

Задача 1. (Задача стабилизации.) Найти синтезирующее управление $p_1^0(t) = p_1^0(t, u(t,x))$ и соответствующее решение $u(t,x) \in W_2^{1,1}$ краевой задачи (4), (5), доставляющие минимальное значение критерию качества (3).

Такое управление $p_1^0(t, u(t,x))$ будем называть стабилизирующим относительно критерия (3).

Вспомогательная задача. Составим вспомогательную задачу оптимального управления на конечном интервале времени $T \langle \infty$. Уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + q(x)p(t), \quad t \in (0,T], \quad 0 \le x \le 1 \qquad (6)$$

Запишем критерий качества:

$$J_3 = \xi_1 \int_0^T [u(t,1) - g(t,1)]^2 \, dt + \beta \int_0^T p^2(t)\, dt. \qquad (7)$$

Задача 2. (Вспомогательная задача оптимального управления.) Найти синтезирующее управление $p_2^0(t) = p_2^0(t, u(t,x))$ и соответствующее решение $u(t,x) \in W_2^{1,1}$ краевой задачи (6), (5), доставляющие минимальное значение критерию качества (7).

Такое управление $p_2^0(t,u(t,x))$ будем называть оптимальным относительно критерия (7).

Решаем задачу 2 с помощью алгоритма [5]. Уравнение Беллмана имеет вид:

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t}=\xi_1\left[u(t,1)-g(t,1)\right]^2-$$
$$-\frac{1}{4\beta}\left(\int_0^1 q(x)v(t,x)dx\right)^2-$$
$$-\frac{a\alpha_5}{\alpha_4}u(t,1)v(t,1)-au(t,1)\frac{\partial v(t,1)}{\partial x}+au(t,0)\frac{\partial v(t,0)}{\partial x}+$$
$$+a\int_0^1 uv_{xx}dx\,.$$

В [5] показано, что этому уравнению удовлетворяет форма второго порядка:

$$\mathrm{S(t,u)=k_1(t)u^2(t,1)+\varphi_1(t)u(t,1)+\eta(t)}.$$

Получаем, что функция v(t, x) равна

$v(t,x)=2k_1(t)u(t,1)+\varphi_1(t)$, и уравнение Беллмана принимает вид:

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t}=\xi_1\left[u(t,1)-g(t,1)\right]^2+\frac{a\alpha_8}{\alpha_4}u_2(t)v(t,1)-$$
$$-\frac{a\alpha_5}{\alpha_4}u(t,1)v(t,1)-\frac{a\alpha_3}{\alpha_1}u_1(t)v(t,0)-$$
$$-\frac{1}{4\beta}\left(\int_0^1 q(x)v(t,x)\,dx\right)^2.$$

Оптимальное синтезирующее управление равно

$$p_2^0(t)=-\frac{1}{2\beta}\int_0^1 q(x)\,dx\left\{2k_1(t)u(t,1)+\varphi_1(t)\right\},\qquad(8)$$

где функции $k_1(t),\varphi_1(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати:

$$-\frac{d\,k_1(t)}{d\,t}=\xi_1-\frac{2a\alpha}{\lambda}k_1(t)-\frac{1}{\beta}\left(\int_0^1 q(x)\,dx\right)^2 k_1^2(t),$$
$$k_1(T)=0,$$
$$-\frac{d\varphi_1(t)}{dt}=-2\xi_1 g(t,1)+\frac{2a\alpha T_c}{\lambda}k_1(t)-\frac{a\alpha}{\lambda}\varphi_1(t)$$
$$-\frac{1}{\beta}k_1(t)\varphi_1(t)\left(\int_0^1 q(x)\,dx\right)^2,\qquad(9)$$
$$\varphi_1(T)=0.$$

Опыт численного решения задач вида (5) – (9) показал, что при $g(t,x)\equiv g=const$ функции $k_1(t),\varphi_1(t)$ в системе (9) имеют интервалы постоянства значений [2]. Будем полагать $k_1(t)\equiv\bar{k}_1=konst$, $\varphi_1(t)\equiv\bar{\varphi}_1=konst$.

Предлагается использовать постоянные $\bar{k}_1,\bar{\varphi}_1$ в алгоритме (8) для стабилизации решения уравнения (1). По (8) запишем алгоритм управления

$$\tilde{p}(t)=-\frac{1}{2\beta}\int_0^1 q(x)\,dx\left\{2\bar{k}_1u(t,1)+\bar{\varphi}_1\right\},\qquad(10)$$

и используем (10) в уравнении (4).

Пример. Для стержня поликремния возьмем

$$a=0.1342;\quad \alpha=0.0244;$$
$$T=60sek;\quad \xi_1=1;\ \beta=0.1;\ \lambda=0.3;$$
$$g=1150^0C;\quad T_c=900^0C;$$
$$u_0(x)\equiv 850^0C;\quad R=4sm\,.$$

Графики функций $k_1(t),\varphi_1(t)$, стабилизирующего управления (10) и соответствующего состояния (4) приведены на рис. 1 – 4.

Метод прямых. Аппроксимируем задачу 1 стабилизации (4), (5), (3) по методу прямых. Получим линейную систему с сосредоточенными параметрами (ССП) с постоянными коэффициентами с квадратичным критерием качества. Для решения задачи стабилизации ССП используем метод [6]. Затем алгоритм управления ССП используем для задачи 1.

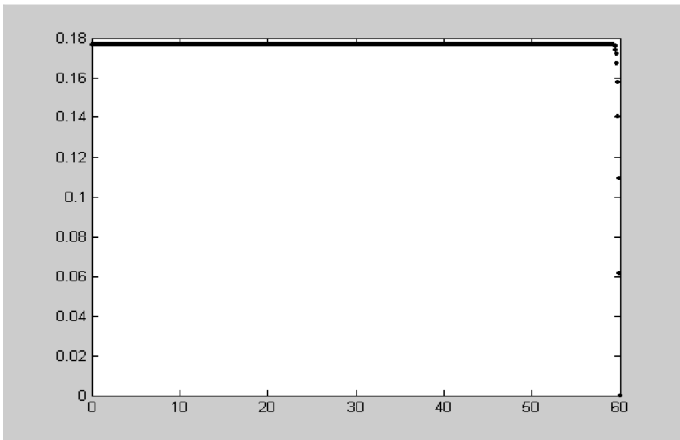

Рис. 1. График функции $k_1(t)$.

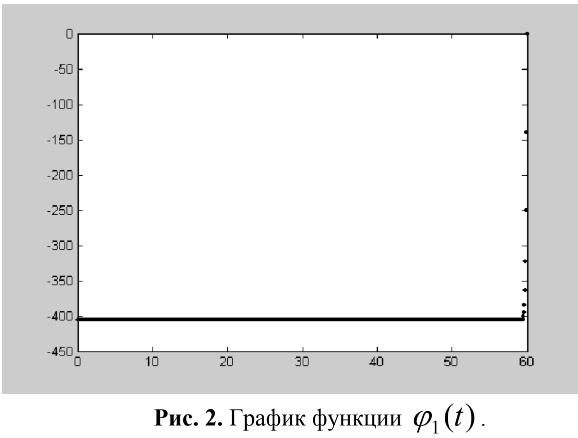

Рис. 2. График функции $\varphi_1(t)$.

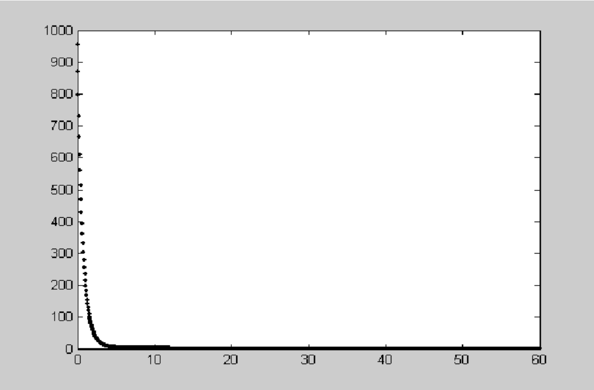

Рис. 3. Стабилизирующее управление (10).

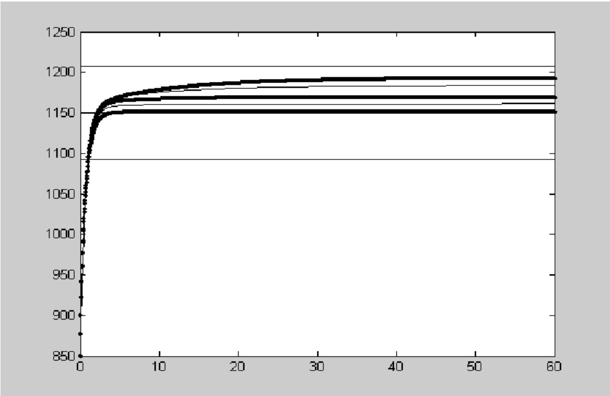

Рис. 4. Нагрев при стабилизирующем управлении (10).

Выводы. Численные расчеты показывают, что предложенный алгоритм (10) переводит температуру стержня от начальной 850^0С в 5%-ую зону от заданной температуры 1150^0С и удерживает ее в этой зоне на интервале времени T .

Литература

1. Шаршеналиев Ж.Ш., Эралиев К.Э., Педяшев В.М., Лещенко Ю.М., Самохвалова Т.П. Принципы построения системы автоматического управления температурой стержней поликремния // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек: Илим, 2001. – С. 108 – 117.
2. Sharshenaliev J.SH., Samochvalova T.P., Leschenko IU.M. Optimal Control by Temperature of Stacks Polysilicon // Generalized solutions in control problems. Proceedings of the IFAC Workshop GSCP-2004 and satellite events, Pereslavl-Zalessky, Russia, September 21 – 27, 2004. – Moskow: Fizmatlit, 2004. – P. 163 – 169.
3. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978.– 463 с.
4. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
5. Самохвалова Т.П. Решения уравнения Беллмана в задачах синтеза оптимального управления процессами теплопроводности // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 52 – 62.
6. Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С. Лекции по теории стабилизации. – Свердловск: Уральский гос. ун-т, 1972. – 273 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Канетов Б.Э.