Каракеев Т.Т., Рустамова Д.К.

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КВАДРАТУР ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

T.T. Karakeev, D.K. Rustamova

THE SOLUTION OF THE LINEAR INTEGRATED EQUATIONS OF VOLTERRA OF THE THIRD SORT WITH THE METHOD OF QUADRATURES

УДК: 517.9

В работе рассматриваются вопросы сходимости, численного метода решение линейных интегральных уравнений Вольтера третьего рода, основанного на квадратных формулах правых прямоугольников. Доказано теорема сходимости, улучшено оценка погрешности метода.

In work considered convergence questions of numerical method solution of the linear integrated equations of Voltaire of the third sort based on square formulas of the right rectangles. It is proved the convergence theorem, it is improved an estimation of an error of a method.

Обоснование метода численного решения линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с невозрастающей функцией вне интеграла, основанных на квадратурных формулах правых прямоугольников содержится в работе [1]. Для случая уравнения с неубывающей функцией вне интеграла данный метод применен в [2]. Доказана сходимость численного решения к точному решению по равномерной сеточной метрике со скоростью, не превышающей величины $O(h^{\beta}),\ \beta \in (0,\frac{1}{2}]$. В настоящей работе будет доказана, что на самом деле, при сохранении тех же условий, наложенных относительно известных функций в работе [2], сходимость численного решения происходит намного быстрее, т.е. $\beta \in [\frac{1}{2},1)$.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x K(x,\xi)\,\varphi(\xi)d\xi = g(x), \tag{1}$$

где известные функции $p(x),\ K(x,\xi),\ g(x)$ удовлетворяют условиям:

а) $p(x), g(x)\in C^1[0,b],\ K(x,\xi)\in C^1(D),\ D=\{(x,\xi)/\,0\le x\le b,\ 0\le \xi\le x\},$

$p(0)=g(0)=0,\ 0\le K(x,x),\ 0\le x\le b,\ 0\le p(x)$ - неубывающая функция.

б) $C_0 p(x)+K(x,x)\ge d_1>0,\ 0<C_0=const$.

Уравнение (1) эквивалентно уравнению [2]

$$p(x)\varphi(x)+\int_0^x G(\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_0^x L(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\mu(x), \tag{2}$$

где $\mu(x) = g(x) + C_0 \int\limits_0^x g(\xi) d\xi$, $L(x,\xi) = K(\xi,\xi) - K(x,\xi) - C_0 \int\limits_\xi^x K(\nu,\xi) d\nu$,

$G(\xi) = C_0 p(\xi) + K(\xi,\xi)$.

Рассматривается случай, когда значение искомой функции в (1) в точке $x=0$ неизвестно и отлично от нуля. В этом случае регуляризирующее семейство уравнений вводим в виде

$$(\varepsilon + p(x))\varphi_\varepsilon(x) + \int\limits_0^x G(\xi)\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = \int\limits_0^x L(x,\xi)\varphi_\varepsilon(\xi) d\xi + \mu(x) + \varepsilon\varphi_{h,0}, \tag{3}$$

где ε - малый параметр из интервала (0,1), величина $\varphi_{h,0}$ такая, что

$$\left|\varphi_{h,0} - \varphi(0)\right| \le h(\varepsilon) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Представим уравнение (3), используя резольвенту ядра $\left(-\dfrac{G(\xi)}{\varepsilon + p(x)}\right)$, в следующем виде:

$$\varphi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int\limits_0^x \exp\left(-\int\limits_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon + p(\nu)} d\nu\right) \frac{G(\xi)}{\varepsilon + p(\xi)} \left[\int\limits_0^\xi L(\xi,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu) d\nu - \int\limits_0^x L(x,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu) d\nu\right] d\xi +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon + p(\nu)} d\nu\right) \int\limits_0^x L(x,\nu)\varphi_\varepsilon(\nu) d\nu - \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \int\limits_0^x \exp\left(-\int\limits_\xi^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon + p(\nu)} d\nu\right) G(\xi) \times$$
$$\times \frac{\mu(\xi) - \mu(x)}{\varepsilon + p(\xi)} d\xi + \frac{1}{\varepsilon + p(x)} \exp\left(-\int\limits_0^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon + p(\nu)} d\nu\right) \left[\mu(x) + \varepsilon\varphi_{h,0}\right]. \tag{4}$$

Уравнение (4) является вольтерровым, имеет единственное решение в классе непрерывных функций и справедлива следующая оценка

$$\left|\varphi_\varepsilon(x)\right| \le C \int\limits_0^x \left|\varphi_\varepsilon(\xi)\right| d\xi + N_0, \; 0 < C, N_0 = const.$$

Так как уравнения (3) и (4) эквивалентны, то отсюда следует существования единственного непрерывного решения уравнения (3). Причем, решение регулиризованного уравнения (3) равномерно стремится к решению исходного уравнения (1) и для $\varphi(x) \in C^1[0,b]$ имеет место оценка

$$\left\|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)\right\|_C \le d_2(\varepsilon + h(\varepsilon)), \; 0 < d_2 = const.$$

На отрезке $[0,b]$ введем равномерную сетку

$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0..n, b = nh\}$, n- натуральное число.

Пространство сеточных функций $\varphi_i = \varphi(x_i)$ обозначим через C_h, с нормой

$$\left\|\varphi_i\right\|_{C_h} = \max_{0 \le i \le n} \left|\varphi_i\right|.$$

Используя квадратурную формулу правых прямоугольников [4, стр.164] для интегралов в (4), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\varphi_{\varepsilon,0} = \varphi_{0,h},$$

$$\varphi_{\varepsilon,i} = -\frac{1}{\varepsilon + p_i} h \sum_{j=1}^{i} \exp\left(-h \sum_{m=j+1}^{i} \frac{G_m}{\varepsilon + p_m}\right) \frac{G_j}{\varepsilon + p_j} [h \sum_{m=1}^{j} L_{j,m}\varphi_{\varepsilon,m} - h \sum_{m=1}^{i} L_{i,m}\varphi_{\varepsilon,m} + \mu_j - \mu_i] +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon + p_i} \exp\left(-h \sum_{j=1}^{i} \frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\right)\left[h \sum_{j=1}^{i} L_{i,j}\varphi_{\varepsilon,j} + \mu_i + \varepsilon\varphi_{h,0}\right], \quad i = 1..n. \qquad (5)$$

Здесь $L_{i,m} = L(x_i, x_m)$, $\varphi_{\varepsilon,m} = \varphi_\varepsilon(x_m)$, $\mu_i = \mu(x_i)$, $p_i = p(x_i)$, $x_j = jh$, $j=1..i$,

$$L(x_i, x_m) = K(x_m, x_m) - K(x_i, x_m) + C_0 h \sum_{s=m+1}^{i} K(x_s, x_m), \; j = 1..i, \; i = 1..n.$$

Величину $\varphi_{0,h}$ выбираем в виде $\varphi_{0,h} = \dfrac{g_1}{p_1 + hG_1}$, для которой из условия *а*) и б) следуют оценки

$$\left|\varphi_{0,h}\right| \le N_1 / d_1, \; \left|\varphi_{0,h} - \varphi(0)\right| \le N_2 h, \; N_1 = \max_{[0,b]}\left|g'(x)\right|, \; 0 < N_2 = const.$$

Лемма 1. Если выполняется условие *а*) и *б*), то для решения системы (5) имеет место оценка

$$\left\|\varphi_{\varepsilon,i}\right\|_{C_h} \le [(N_3 + C_0 N_1)N_4 + N_1 / d_1] exp(N_4 b), \; 0 < N_3, N_4 = const.$$

Лемма 2. При выполнении условий *а*), *б*) и связи $\varepsilon = O(h^\alpha)$, $0 < \alpha \le \dfrac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\left|\int_0^x \frac{G(\nu)}{\varepsilon + p(\nu)} d\nu - h \sum_{j=1}^{i} \frac{G_j}{\varepsilon + p_j}\right| \le C_1 h^\sigma, \sigma = 1 - 2\alpha, i = 0..n, \; 0 < C_1 = const.$$

Доказательство леммы 1 приводится в [2], а леммы 2 в [1].

Лемма 3. Пусть выполняются условия *а*), *б*) и $\varphi(x) \in C^1[0, b]$. Тогда найдется такое число $0 < N_5$, что имеет место оценка

$$\left\|(H_\varepsilon \varphi)(x_i) - H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right\|_{C_h} \le N_5 h, \quad 0 < N_5 = const,$$

где действие оператора H_ε^h на сеточную функцию $w_0, w_1, \ldots, w_n$ определяется по формуле

$$H_\varepsilon^h[w_i]=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}[w_j-w_i]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)[w_i-w_0],$$

$$(H_\varepsilon\varphi)(x)\equiv-\frac{1}{\varepsilon+p(x)}\int_0^x exp\left(-\int_\xi^x\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)G(\xi)\frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{\varepsilon+p(\xi)}d\xi+\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\varepsilon+p(x)}\times$$

$$\times\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right).$$

Доказательство. Положим $x=x_i$, $(i=0..n)$ в $(H_\varepsilon\varphi)(x)$ и заменим интегралы в $(H_\varepsilon\varphi)(x)$ по квадратурной формуле правых прямоугольников.

$$(H_\varepsilon\varphi)(x_i)=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}[\varphi_j-\varphi_i]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\times$$

$$\times\left[\varphi_i-\varphi_0\right]+\widetilde{R}_i,\ i=0..n.$$

Остаточный член R_i, определяется в следующем виде

$$\widetilde{R}_i=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\int_0^{x_i}\exp\left(-\int_\xi^{x_i}\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}(\varphi_i-\varphi(\xi))d\xi+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\times$$

$$\times\exp\left(-\int_0^{x_i}\frac{G(\nu)}{\varepsilon+p(\nu)}d\nu\right)(\varphi_i-\varphi_0)+\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{n=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\times$$

$$\times\left(\varphi_i-\varphi_j\right)-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)(\varphi_i-\varphi_0)$$

Разбивая остаточный член на суммы выражений, имеем оценки

$$\left|\widetilde{R}_i\right|\le\left|R_{1,i}\right|+\left|R_{2,i}\right|+\left|R_{3,i}\right|+\left|R_{4,i}\right|,$$

1) $$\left|R_{1,i}\right|=\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left(\varphi(\xi)-\varphi_j\right)d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left\|\varphi'(x)\right\|_C\left(\xi-x_j\right)d\xi\le$$

$$\le\frac{\left\|\varphi'\right\|_C}{2d_1}h\left\|G\right\|_C\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left(h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_j}\le\frac{1}{2}\left\|\varphi'\right\|_C\left\|G\right\|_C T_0h,$$

$$T_0=\sup\left|\sum_{j=1}^{i-1}e^{-\sigma_j}\sigma_j\right|,\ \sigma_j=\sum_{m=j+1}^{i}\frac{hG_m}{\varepsilon+p_m};$$

2) $$\left|R_{2,i}\right|=\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left(\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}-\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}\right)(\varphi(\xi)-\varphi_i)d\xi\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}T_1\|\varphi'\|_C\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{(x_i-\xi)|\varphi'(x)|(\xi-x_j)}{(\varepsilon+p_j)(\varepsilon+p(\xi))}d\xi\le\frac{T_1\|\varphi'\|_C}{2}\times$$

$$\times\frac{1}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)(x_i-x_j)\frac{h^2}{\varepsilon+p_j}\le\frac{1}{2}T_1\|\varphi'\|_C\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\times$$

$$\times\left(h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{1}{d_1}\frac{h^2}{\varepsilon+p_j}\le\frac{1}{2d_1}T_1T_0\|\varphi'\|_C\frac{h^2}{\varepsilon},\ T_1=\|G'\|_C+\|G\|_C\|p'\|_C;$$

3) $$\left|R_{3,i}\right|=\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left(\exp\left(-\int_{\xi}^{x_i}\frac{G(v)}{\varepsilon+p(v)}dv\right)-\exp\left(-h\sum_{m=1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}(\varphi_i-\varphi(\xi))d\xi\right|\le\|\varphi'\|_C T_2\frac{\|G\|_C}{\varepsilon+p_i}\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\times$$

$$\times(x_i-x_j)h\le\|\varphi'\|_C\frac{T_2}{d_1}\|G\|_C h\sum_{m=j+1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left(h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\le$$

$$\le\|\varphi'\|_C\|G\|_C\frac{T_2T_0}{2d_1}h,\ T_2=\sup\left|1-\exp\left(-\int_{x_i\varepsilon}^{x_i}\frac{G(v)}{\varepsilon+p(v)}dv+h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\right|;$$

4) $$\left|R_{4,i}\right|=\left|\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}\left(\exp\left(-\int_0^{x_i}\frac{G(v)}{\varepsilon+p(v)}dv\right)-\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\right)(\varphi_i-\varphi_0)\right|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p_i}T_3\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{i+1}}\left|\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}-\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right|d\xi\|\varphi'\|_C(x_i-x_0)\le$$

$$\le\varepsilon\frac{T_3}{2}\|\varphi'\|_C\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{h}{\varepsilon+p_j}\frac{G_j}{d_1}\right)^2\left(\|G'\|_C h+\|G\|_C\|p'\|_C\frac{h}{\varepsilon}\right)\le$$

$$\le\frac{2}{e^2d_1^2}T_3T_1\|\varphi'\|_C h,\ T_3=\sup\left|\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left(\frac{G(\xi)}{\varepsilon+p(\xi)}-\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)d\xi\right)\right|.$$

Так как

$$\left|(H_\varepsilon\varphi)(x_i)-H_\varepsilon^h[\varphi_i]\right|\le\left|\widetilde{R}_i\right|,$$

то учитывая оценки 1)-4) приходим к утверждению леммы 3.

Теорема 1. При выполнении условий *а*), *б*) и $\varepsilon=O(h^\alpha)$ для всех $0<\alpha\le 1/2$, решение системы (5) при $h\to 0$ равномерно сходится к φ_i - точному решению уравнения (1), причем имеет место оценка

$$\left\|\varphi_{\varepsilon,i}-\varphi_i\right\|_{C_h}\le N_6h^{1-\alpha},\ 0<N_6=const.$$

Доказательство. Полагая $x=x_i$, $i=1..n$ в (4), применим формулу правых прямоугольников для интегралов в этом уравнении. Тогда получим систему

$$\varphi_i=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}L_{j,m}\varphi_m-h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\varphi_m+\varepsilon(\varphi_j-\varphi_i)+\right.$$

$$\left.+\mu_j-\mu_i\right]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{j=1}^{i}\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\right)\left[h\sum_{j=1}^{i-1}L_{i,j}\varphi_j-\varepsilon\varphi_i+\mu_i+\varepsilon\varphi_{h,0}\right]+$$

$$+R_i,\ i=1..n. \tag{6}$$

где R_i – сумма всех остаточных членов интегралов.

Введем вектор погрешности $\eta_{\varepsilon,i}^h=\varphi_\varepsilon(x_i)-\varphi(x_i)=\varphi_{\varepsilon,i}-\varphi_i$, $i=1..n$. Тогда из (5) и (6) получим

$$\eta^h{}_{\varepsilon,i}=-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}L_{j,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}-h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon(\varphi_j-\varphi_i)\right]+\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{m=1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left[h\sum_{ò=1}^{i-1}L_{i,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}+\varepsilon(\varphi_i-\varphi_{h,0})\right]+$$

$$+R_i,\ i=1..n. \tag{10}$$

Отсюда проведя оценки получим

$$\left|\eta^h{}_{\varepsilon,i}\right|=\left|-\frac{1}{\varepsilon+p_i}h\sum_{j=1}^{i}\exp\left(-h\sum_{m=j+1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\frac{G_j}{\varepsilon+p_j}\left[h\sum_{m=1}^{j-1}L_{j,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}-h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}\right]\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{\varepsilon+p_i}\exp\left(-h\sum_{m=1}^{i}\frac{G_m}{\varepsilon+p_m}\right)\left[h\sum_{m=1}^{i-1}L_{i,m}\eta^h{}_{\varepsilon,m}\right]\right|+\varepsilon\left|H_\varepsilon^h(\varphi_i)\right|+N_2h+\left|R_i\right|\le N_4h\sum_{m=1}^{i-1}\left|\eta_{\varepsilon,m}^h\right|+$$

$$+\varepsilon\left|H_\varepsilon^h(\varphi_i)\right|+N_2h+\left|R_i\right|,\ i=1..n,.$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла-Беллмана [3, стр. 20], имеем

$$\left|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right| \le \left(\varepsilon\left|H_{\varepsilon}^{h}[\varphi_i]\right| + N_2 h + |R_i|\right)\exp(N_4 b).$$

Для остаточных членов R_i справедлива оценка

$$|R_i| \le N_6 h + N_7 \frac{h}{\varepsilon}, 0 < N_6, N_7 = const\,.$$

Тогда, в силу оценки леммы 3, по сеточной норме получим

$$\left\|\eta_{\varepsilon,i}^{h}\right\|_{C_h} \le \left((N_2 + N_6)h + N_7 h/\varepsilon\right)\exp(N_4 b).$$

Следовательно, учитывая связь $\varepsilon = O(h^{\alpha})$, $0 < \alpha \le 1/2$ приходим к утверждению теоремы 1.

Литература:

1. Глушак А.В., Каракеев Т.Т. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу // ЖВМиМФ. – 2006. – Т.46.-№ 5. – С. 848-857.
2. Каракеев Т.Т. Рустамова Д.К. Регуляризация и метод квадратур для линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода// Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2009. Выпуск 40.- С.127-132.
3. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН. – 1999. – 193 с.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – Москва: Наука, 1989. – 432с.

Рецензент: к.ф.-м.н. Султанов Р.К.