Мамедов А.А.

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

A.A. Mamedov

THE OPTIMUM METHODS OF ALLOCATION OF A USEFUL SIGNAL IN THE CONDITIONS OF APRIORISTIC UNCERTAINTY

УДК: 621.397.62 (075.)

В настоящей статье автором произведен анализ оптимальных методов выделения полезного сигнала в условиях априорной неопределенности.

In the present article the author makes the analysis of the optimum methods of allocation of a useful signal in the conditions of aprioristic uncertainty.

В основе многих процедур оптимальной фильтрации лежит байесовский критерий - минимум байесовского риска [1, 2]. Предположим, что существуют две дискретные реализации $\{\mathrm{s}_{\mathrm{k}}\}_{k=0}^{n-1}$ и $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ случайных величин S и Y с известной совместной дискретной плотностью распределения $p(s_k, y_k)$.

Величины $\{\bar{s}_k\}_{k=0}^{n-1}$ являются такими оценками дискретной случайной величины S, что существует следующая зависимость [1]:

$$\bar{s}_k = h(y_k).$$

При этом, истинными значениями наблюдаемой дискретной случайной величины S являются s_k. Ошибка оценки определяется следующим образом:

$$e_k = s_k - \bar{s}_k = s_k - h(y_k).$$

Функцию *h* выбирают таким образом, чтобы она минимизировала среднее значение некоторой случайной величины - функции ошибки, которая называется функцией потерь и обозначается как $L[s, h(y)]$. - Функция h может быть как линейной, так и нелинейной. Для дискретного случая, баессовским риском называется функция [3]:

$$B(h) = \sum_{s_k} \sum_{y_k} L[s_t, h(y_t)] p(s_t, y_t). \tag{1}$$

Рассматриваются следующие функции потерь:

- квадратичная:

$$\mathrm{L}[\mathrm{s}, \bar{\mathrm{s}}] = e^2, \tag{2}$$

- абсолютная по величине ошибки:

$$L[s, \bar{s}] = |e|, \tag{3}$$

- равномерная в интервале:

$$L[s, \bar{s}] = \begin{cases} 0 \text{ при } |\mathrm{e}| < \varepsilon / 2, \\ 1/\varepsilon \text{ при } |e| > \varepsilon / 2 \end{cases} \tag{4}$$

Предпочтение использования квадратичной функции потерь (2) объясняется тем, что значение $L[s, \bar{s}]$ имеет квадратичный характер, т.е. линейное увеличение ошибки приводит к квадратичному увеличению значения функции потерь [1].

В случае, когда математическая модель дискретной случайной величины К представляет собой аддитивную смесь полезной и шумовой составляющей:

$$y_k = s_k + \varepsilon_k, k = \overline{0,n}, \tag{5}$$

где s_k - отсчеты неслучайной (полезной) составляющей, ε_k - отсчёты случайной (шумовой) составляющей, $\bar{s}_k$ - оценка полезной составляющей s_k.

Если функция потерь L является квадратичной, то фильтр, минимизирующий среднеквадратическое отклонение оценки полезной составляющей от её истинной модели, называется винеровским [4]. Целью фильтрации сигнала является получение оценки полезной составляющей s_k в качестве отклика стационарной линейной системы [3]:

$$\bar{s}_k = \sum_{k=o}^{n} y_k g_{n-k},$$

где g_k - импульсная характеристика дискретной линейной системы.

В случае винеровской фильтрации предполагается, что известны дискретные корреляционные функции полезной $R_s(k)$ и шумовой составляющей $R_n(k)$, а также их взаимные дискретные корреляционные функции $R_{sn}(k) = R_{ns}(k)$.. Ошибка фильтрации определяется следующим образом:

$$e_k = s_k - \bar{s}_k = s_k - \sum_{k=o}^{n} y_k g_{n-1}.$$

Критерием оптимальности является [4]:

$$\Delta = \min E(e_k^2),$$

где E - оператор усреднения.

При выводе уравнения фильтра предполагается, что ошибка фильтрации не зависит от входного воздействия $E(y_k e_k) = 0,$ тогда $E(y_k(s_k - \sum_{k=0}^{n} y_k g_{n-k})) = 0,$ отсюда следует уравнение Винера-Хопфа для дискретного фильтра Винера:

$$R_{ys}(k) = \sum_{k=0}^{n} R_y(k) g_k, \tag{6}$$

Задача синтеза фильтра Винера заключается в решении уравнения (6) и определении оптимальной импульсной характеристики $g_{опт} = g_к$. В простейшем случае, винеровский фильтр реализуется в виде нерекурсивного дискретного фильтра с конечной импульсной характеристикой. В этом случае для его анализа удобно перейти к матричной форме записи уравнения (6) :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{ys}} = R_y G \tag{7},$$

где R_{ys} - вектор взаимной корреляции между полезной составляющей и входной последовательностью; R_{y} - автокорреляционная квадратная матрица входной последовательности порядка n; G - вектор коэффициентов конечной импульсной характеристики.

Решением уравнения (7) является:

$$G = G_{опт} = R_y^{-1} R_{ys}.$$

Минимальная ошибка фильтрации определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned}\Delta &= \min E(e_k^2) = E(s_k^2) - E(s_k \bar{s}_k) = \\ &= E(s_k^2) - G_{отп}^m E(s_k y_k) = \sigma_s^2 - G_{отп}^m R_{ys}.\end{aligned} \tag{8}$$

где $(y_k, y_{k+1}, ..., y_n)$ - вектор входной реализации, σ_s^2 - мощность полезной составляющей.

Анализ выражения (8) показывает, что минимальная ошибка фильтрации зависит от формы полезной составляющей, матрицы взаимной корреляционной функции полезной составляющей и входной последовательности. Винеровская оценка является одношаговым блочным процессом, которая не подходит для конечной выборки. С поступлением новых значений сигнала необходимо пересчитывать полученные ранее оценки и обновлять матрицы R_{ys} и $\mathrm{R_y}$ [2]. Использование винеровского подхода обработки дискретной последовательности затрудняется на практике отсутствием априорной информации о полезном сигнале и статистических характеристиках аддитивного шума. Расчет оптимальной импульсной характеристики фильтра Винера предполагает наличие априорной информации о взаимной корреляционной функции полезного и исходного обрабатываемого сигнала. Также накладываются дополнительные условия на взаимные корреляционные матрицы компонент и вектор взаимной корреляции R_{ys}, которые на практике выполняются со значительными допущениями [4]. Таким образом, если исходная реализация представляет собой выборку ограниченного объема в условиях априорной неопределенности, использование оптимального фильтра Винера является мало эффективным [3].

Вигнеровская оценка коэффициентов оптимальной импульсной характеристики требует полного пересчёта всех авто- и взаимно корреляционных матриц для каждой новой выборки, что с вычислительной точки зрения нерационально. Если предположить, что ряд входной последовательности является бесконечным, то значительно более удобными являются рекуррентные алгоритмы получения оценок. Калманоаское оценивание реализует рекурсивную процедуру адаптации, основанную на авторегрессионной модели процесса генерирования сигнала . Предполагается, что случайный процесс S_k, является марковским и его можно представить в виде выходного сигнала линейной дискретной системы первого порядка [4]. На входе данной системы действует белый шум W_k нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_w^2. При этом выходной сигнал описывает разностным уравнением первого порядка:

$$S_k = a \cdot s_{k-1} + w_{k-1}, a = const. \quad (9)$$

На вход калмановского фильтра действует дискретная последовательность, математическая модель которой описывается выражением:

$$y_k = c \cdot s_k + v_k, \quad (10),$$

где $c = const, v_k$ - аддитивная шумовая составляющая с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_v^2.

Необходимо получить рекуррентную оценку $\bar{s}_k$ по критерию минимума наименьших квадратов. Рекурсивная оценка первого порядка имеет вид:

$$\bar{s}_k = b_k \bar{s}_{k-1} + d_k y_k, \quad (11),$$

где b_k, d_k - коэффициенты, зависящие от времени.

Ошибка фильтрации определяется, как $e_k = \bar{s}_k - s_k$, тогда критерием оптимальной оценки является:

$$\min \mathrm{p_k} = E\left[\bar{s}_k - s_k\right]^2 = E\left[b_k \bar{s}_{k-1} + d_k y_k - s_k\right]^2. \quad (12)$$

Для получения оптимальных оценок, необходимо минимизировать целевую функцию (12) и определить коэффициенты $\mathrm{b_k}, d_k$. При получении оценок используется принцип ортогональности, который предполагает, что $E\left[e_k \bar{s}_{k-1}\right] = 0$ и $E\left[v_k \bar{s}_{k-1}\right] = 0$. Решая уравнение (8), с учётом (11-12), получим уравнение адаптивного рекурсивного скалярного фильтра Кальмана :

$$\bar{s}_k = a \cdot \bar{s}_{k-1} + d_k (y_k - a \cdot c \cdot \bar{s}_{k-1}). \quad (13)$$

Анализ выражения (13) показывает, что оценка $\bar{s}_k$ зависит от константы модели марковского процесса (9) и константы математической модели исходной дискретной последовательности (10), а также от коэффициента d_k, который зависит от параметров шума v_k и w_k и текущего значений среднеквадратической ошибки p_k. В работе получено явное выражение для d_k:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{k}} = \frac{c \left[a^2 p_{k-1} + \sigma_w^2\right]}{\sigma_v^2 + c^2\sigma_w^2 + c^2 a^2 p_{k-1}}, \tag{14}$$

где $p_k = \frac{1}{c}\sigma_v^2 d_k$.

Анализ выражения (14) показывает, что с его помощью можно оценить время переходного процесса адаптации.

Вывод: Реализация данного метода оценки полезного сигнала при условии ограниченности объема выборки и априорной информации о полезном сигнале и аддитивном шуме, является эффективным только в случае небольших объемов выборки. При использовании оптимальных методов оценки необходима информация о взаимной корреляционной функции между исходным обрабатываемым сигналом и выделяемый полезным сигналом, что крайне редко выполняется на практике.

Литература:

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. Учебное пособие для ВУЗов. – М.: Радио и связь, 2004. – 608 с.
2. Каллианпур Г.Стохастическая теория фильтрации: Пер. с англ./Под ред. А.В. Скорохода.-М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. Лит., 1987.-320с.
3. Адаптивные фильтры/ Под ред. К.Ф.Н Коуэна и П.М. Гранта.-М.: Мир, 1988
4. Орлов А.И. Современная прикладная статистика. WEB: http://orlov.i-connect.ru.
5. Орлов А.И. Современная прикладная статистика. WEB: http://orlov.i-connect.ru.

Рецензент к.т.н., доцент Айтмагамбетов А.З.