НАУКА И НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, № 5, 2010

Достиярова А.М.

ГЛОБАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

A.M. Dostiyarova

THE GLOBAL METHODS OF ALLOCATION OF A USEFUL SIGNAL IN THE CONDITIONS OF APRIORISTIC UNCERTAINTY

УДК: 621. 396. 6(075.8)

В настоящей статье автором произведен анализ глобальных методов выделения полезного сигнала в условиях априорной неопределенности.

In the present article the author makes the analysis of the global methods of allocation of a useful signal in the conditions of aprioristic uncertainty.

Широкое применение в теории обработки сигналов имеет метод наименьших квадратов. Он является частным случаем баессовского оценивания при квадратичной функции потерь. Предполагается, что известна функциональная зависимость полезного сигнал. Необходимо оценить параметры функции полезного сигнала, т.е. произвести аппроксимацию исходных значений сигнала и оценить параметры аппроксимирующей функции.

Метод наименьших квадратов относится к классу параметрических методов обработки и имеет квазиоптимальные свойства в условиях ограниченной априорной информации о полезном сигнале и шумовой составляющей. Следует отметить, что он является глобальным методом оценивания и для его использования необходимо фиксировать объем выборки. Предположим, что модель исходной реализации представляет собой дискретную последовательность $\{\mathrm{Y_k}\}_{k=0}^{n}$ и описывается выражением (1).

$$\bar{s}_k = h(y_k). \tag{1}$$

Используя выражение квадратической функции потерь (2),

$$\mathrm{L}[\mathrm{s}, \bar{\mathrm{s}}] = e^2, \tag{2}$$

целевая функция метода наименьших квадратов записывается в следующем виде:

$$\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} (Y_k - S_k)^2 \to \min. \tag{3}$$

Выражение (3) показывает, что осуществляется минимизация суммы квадратов отклонения значений модели полезной составляющей S_k от значений исходной реализации Y_k. Для минимизации выражения (3) необходимо определить функцию модели полезной составляющей S_k. В простейшем случае, S_k описывается полиномом степени p:

$$\mathrm{S_k} = a_0 + a_1 \cdot k + a_2 \cdot k^2 + ... + a_p \cdot k^p = \sum_{i=0}^{p} a_i k^i,$$

где $\mathrm{k} = \overline{0, \mathrm{n}}$; $p \geq 0$ - степень аппроксимирующего полинома.

Выражение (3) перепишется следующим образом:

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \left(\mathrm{Y_k} - \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \right)^2 \to \min_{a_0, a_1 \cdots p_n}. \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой систему линейных уравнений, относительно коэффициентов a_i, решением которых является получение их оценок

$$\bar{a}_i \div \bar{S}_k = \sum_{i=0}^{p} \bar{a}_i \cdot k^i.$$

В качестве аппроксимирующей функции S_k не обязательно может быть выбрана полиномиальная модель. В работе [1] рассматривается минимизация целевой функции (4) в случае экспоненциальной модели S_k, показательной, логарифмической. Использование этих моделей затруднено, так как необходимо применять дополнительные методы по линеаризации системы уравнений, на которые в свою очередь накладывают дополнительные ограничения из-за вида аппроксимирующей функции. Их использование ограничено достаточно узкими классами решаемых задач [2].

Одной из важнейших задач, которую необходимо решать при использовании полиномиальной аппроксимирующей функции, является выбор степени аппроксимирующего полинома p в условиях априорной неопределенности о модели полезного сигнал. В работе [3] предлагается выбирать значение p таким образом, чтобы отношение $\sigma_{ш}^2$ к $\overline{\sigma_{ост}^2}$, имело распределение Фишера. На практике, выбирают $p \le 2$, так как увеличение p не приводит к значимому увеличению достоверности оценки полезной составляющей, по сравнению с увеличением вычислительных затрат.

Анализ характеристик метода наименьших квадратов показывает, что его эффективность во многом зависит от априорной информации о модели полезного сигнала и статистических характеристик шумовой составляющей. В случае, гауссовского распределения аддитивной шумовой составляющей, оценки метода наименьших квадратов совпадают с оценками метода максимума правдоподобия и являются эффективными, несмещенными и состоятельными [3]. Даже в случае невыполнения условия гауссовского распределения шума, полученные оценки являются наилучшими, в: классе линейных оценок [3]. Одним из недостатков метода является; то, что для получения оценок аппроксимирующей функции необходимо использовать всю реализацию $\{\mathrm{Y_k}\}_{k=0}^{n}$ и при добавлении к исходной реализации' новых отсчётов Y_{k+1}, необходимо пересчитать все оценки аппроксимирующего полинома сделанные ранее [4, 5]. Этот недостаток не позволяет использовать метод для обработки данных по мере их поступления; Следует отметить, что ошибка, аппроксимации полезной' составляющей неравномерно распределена вдоль реализации и имеет максимальные значения на ее границах. С ростом степени, p, неравномерность относительной погрешности аппроксимации вдоль реализации увеличивается. Таким образом, использование метода наименьших квадратов в условиях априорной неопределенности о полезной и шумовой составляющей ограничено.

В условиях, когда априорные данные об обрабатываемой реализации ограничены, эффективное применение находят методы, позволяющие, на основе единственное реализации, получать множество оценок характеристик исходного процесса или их функциональные зависимости. Впервые данный принцип оценки предложил М.Кенуем и в дальнейшем развит в работах Б. Эфрона. Последние работы, связанные с оценкой полезной составляющей в условиях априорной неопределенности на основе принципа получения, множества оценок представлены в работах В.И.Марчука, Я.Астолы, В.Катковника, К.Егиазаряна. В работах В.И.Марчука предложен метод размножении оценок, основанный на получении множества оценок полезного сигнала при выделении его из реализации на фоне аддитивного шума. При этом объем исходной реализации ограничен; как и априорная информации о полезной и шумовой, составляющей. Исходное предположение состоит в том, что результаты измерений представляют собою некоторый, случайный нестационарный сигнал в виде единственной реализации исследуемого процесса ограниченного объема (1).

Априорная информация об исследуемом процессе заключается в том, что на некоторых подинтервалах исходного сигнала $\Delta_{\mathrm{J}} \subset \left[t_j, t_{j-1}\right],\ j = 1...m$ он достаточно точно описывается функциями пространства с ограничением на $p \le 2$ [5]. С помощью случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0;1), получают *m-1* чисел $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)},...,\xi_{m-1}^{(1)} \in (0;1)$ и осуществляем взаимно-однозначное их отображение на интервал результатов измерений (t_0, t_n). При этом получается соответствующее разбиение числами $a_1^{(1)}, a_2^{(1)},..., a_{m-1}^{(1)}$ промежутка (t_0, t_n) на m подинтервалов, где $a_1^{(1)} = t_0 + (t_n - t_0)\xi_1^{(1)},\ i = 1,2,..., m-1.$

Обозначим подинтервалы, как $\Delta_1^{(1)} = \left[t_0; a_1^{(1)}\right],\ \Delta_2^{(1)} = (a_1^{(1)}; a_2^{(1)}\ ],...,\ \Delta_m^{(1)} = \left(a_{m-1}^{(1)}; t_n\right]$. Каждый подинтервал удовлетворяет следующему условию: каждый $\Delta_i^{(1)}\,(i = 1,2,..., m)$ должен содержать не менее L отсчетов исходного процесса результатов измерений из набора $\{t_0, t_1,..., t_n\}$ Данное условие означает, что, по крайней мере, $Lm \le n.$. Для каждой новой оценки полезного сигнала данная последовательность действий повторяется, т.е. процедура разбиения отрезка $\lfloor t_0, t_n \rfloor$на *m* подинтервалов случайной длины (с проверкой вышеуказанного условия) повторяется *N* раз. В результате получаем набор разбиений временного отрезка $\lfloor t_0, t_n \rfloor$:

$$\begin{cases} \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(1)} & \dots & \Delta_m^{(1)}; \\ \Delta_1^{(2)} & \Delta_2^{(2)} & \dots & \Delta_m^{(1)}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_1^{(N)} & \Delta_2^{(N)} & \dots & \Delta_m^{(N)}. \end{cases}$$

На каждом из подинтервалов $\Delta_i^{(j)}$, с помощью методом наименьших квадратов, находим значения аппроксимирующих функций в каждой точке интервала $\lfloor t_0, t_n \rfloor$. Для каждого разбиения, оценка полезного сигнала $\tilde{S}^{(j)}(t),\ j = 1,2,\dots,N$ представляет собой кусочно-ломанную кривую, которая описывается на каждом подинтервале полиномом степени $p \le 2$. Результирующую оценка $\overline{S}(t)$ находится как среднее арифметическое функций $\tilde{S}^{(j)}(t)$. (по всем *N* разбиениям отрезка $\lfloor t_0, t_n \rfloor$);

$$\overline{S}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \tilde{S}^{(j)}(t) \qquad (5)$$

Также предложен ряд модификаций данного метода оценки, суть которых заключается в взвешивании оценок в каждом сечении процесса:

$$\overline{S}(t_j) = \frac{\sum d_i^j \tilde{S}^{(j)}(i)}{\sum d_i^j}, \text{ где, } d_i^j = \left|\tilde{S}^{(j)}(i) - M_j\right|, M_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{S}^{(t)}(j).$$

Аналитически определена функциональная зависимость между основными параметрами метода размножения оценок, которая описывается выражением:

$$P(n, R, L) = \begin{cases} 0. & \text{при } n < L(R+1); \\ n - (R+1)L + 1, & \text{при } L(R+1) \le n < L(R+2) - 1; \\ \left[\dfrac{n - 2L + 1}{R}\right], & \text{при } n \ge L(R+2) - 1; \end{cases}$$

где *n* - объем выборки результатов измерений; ь - минимальное число измерений в подинтервале; *R*=m+1 - число разбиений исходной выборки на покрытия; $P(n, R, L) \approx N$ - количество максимально возможного размножений оценок полезной составляющей при условии отсутствия совпадения границ подинтервалов во всех вариантах разбиений.

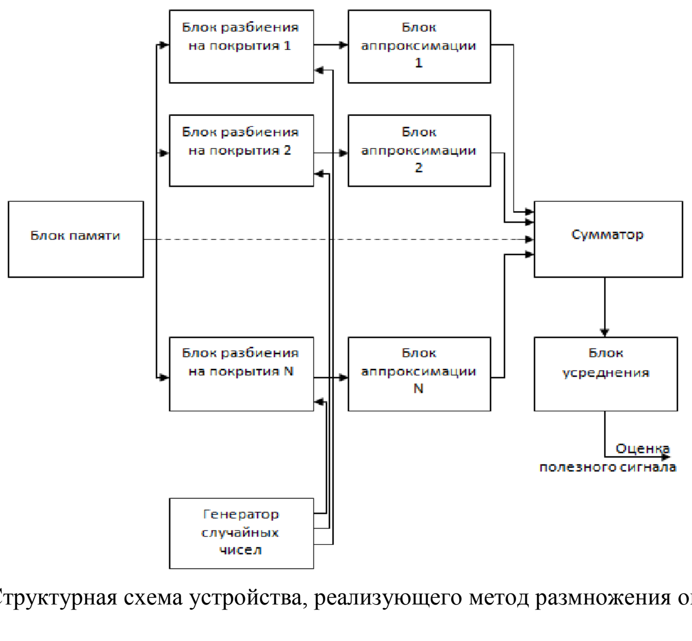

Рис.1. Структурная схема устройства, реализующего метод размножения оценок

Определение минимального числа элементов L каждого подинтервала и их количество зависит от точности априорной информации о длине интервала, на котором функцию измеряемого процесса можно описать полиномом второй степени. Автором экспериментально установлено, что $LR \approx 0{,}6n$, а минимальная длина исходной выборки может составлять 5 отсчетов.

На рисунке 1 представлена структурная схема устройства, реализующего метод размножения оценок, которое состоит из блока памяти, N каналов, каждый из которых содержит блок разбиения на покрытия и блок аппроксимации. Выходы всех каналов подключены к сумматору, с которого сигнал поступает на блок усреднения. С помощью блока генератора случайных чисел для каждого из N каналов в блоках разбиения на покрытия задается интервал обработки исходной реализации.

Функционирование устройства, структурная схема которого представлена на рисунке 1, осуществляется следующим образом. Исходная единственная реализация обрабатываемого сигнала поступает на вход и записывается в блок памяти. С помощью априорно заданных параметров обработки сигнала, блоком генератора случайных чисел формируется N случайные последовательности, которые разбивают исходную реализацию сигнала N раз. Значения границ покрытий поступают на блоки разбиения на покрытия. Каждый канал устройства осуществляет обработку исходной реализации в рамках фиксированного набора ранжированных случайных чисел, разбивающие исходную реализацию на покрытия. В соответствии с априорной установленными параметрами, в каждом канале устройства в рамках каждого покрытия осуществляется аппроксимация значений сигнала полиномом не выше второй степени и расчет значений аппроксимирующих функций. Полученные, таким образом, N оценок в N каналах устройства поступают на сумматор, где в каждом сечении исходного процесса имеем сумму N оценок полезного сигнала. Суммарная оценка поступает в блок усреднения, где каждое значение взвешивается на количество просуммированных значений, что и является результирующей оценкой полезного сигнала (рисунок 1).

В результате проведения натурного эксперимента с имитацией процесса обработки и машинного эксперимента показано, что полученные рекомендуемые значения параметров метода размножения оценок практически инварианты в широком классе моделей шумовой составляющей и моделей полезной составляющей пространства.

Несмотря на это, данный метод относится к глобальным методам обработки и для его использования необходимо фиксировать объем исходной выборки. Также не удалось выработать четкие рекомендации по выбору степени аппроксимирующего полинома на каждом интервале аппроксимации. Недостаточно внимания уделено модифицированному подходу оценки, когда множества оценок полезного сигнала в каждом сечении процесса взвешивается, а не усредняется. В основе своей, данный подход оценки ориентирован на осуществление обработки в многоканальной системе, что отражает представленная блок схема алгоритма (рисунок 1).

Вывод: Реализация глобального метода оценки полезного сигнала в виде устройства, реализующего метод размножения оценок, путем последовательного выполнения операций разбиения на интервалы и аппроксимации приводит к значительным вычислительным затратам и является эффективным только в случае небольших объемов выборки, что и определяет класс решаемых задач с ограниченным объемом реализации. При этом данный подход не позволяет реализовать обработку по мере поступления данных.

Литература:

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы экономики: Учебник для ВУЗов: 2 т. 2-е из., испр. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 656 с.
2. Абрамов С.К. Методы вторичной обработки сигналов и изображений в системах дистанционного зондирования на основе использования мириадного оценивания. – Харьков: 2003. – 216 с.
3. Функциональный анализ / Бирман М.Ш., Виленкин Н.Я. и др. Под общ. Ред. С.Г.Крейна. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат.лит., 1972. – 544 с.
4. Егорова Н.Ю., Фарбер В.Е. Решение задачи нелинейной фильтрации при наличии негауссовских ошибок измерений// Радиотехника и электроника. 1995. №4, Т. 40. С.604-609.
5. Куликов Е.И. Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. – М.: Сов.радио., 1988. – 244 с.

Рецензент к.т.н., доцент Айтмагамбетов А.З.