Калдыбаева Г.А., Сатыбаев А.Дж.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ

G.A. Kaldybaeva, A.Dzh. Satybaev

ON A DYNAMICAL ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM THERMOELASTICITY

УДК: 517. 962.2, 519. 876.2

В данной статье рассмотрена задача определения теплового расширения термоупругости при переменных функций плотности среды и коэффициентов Ламэ.

In this article the problem of determining the thermal expansion of thermo elasticity with variables of density and Lame coefficients.

Динамическая обратная задача термоупругости впервые поставлена и исследована в работах В.Г. Яхно и С.О. Апбасова [1,2].

В этих работах исследована задача определения переменных функций плотности среды и коэффициентов Ламэ.

1. Постановка задачи

Пусть на границу $x=0$ полупространства R_+ задается тепловой удар и при этом температура на границе повышается от температуры T_0 до T_1 .

При этом математическая модель термоупругости описывается дифференциальным уравнением в частных производных вида [3].

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}[(\lambda(z)+2\mu(z))\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}+ \\ +(3\lambda(z)+2\mu(z))R(\theta(z,t))],\qquad z\in R_+,\qquad t\in R_+, \tag{1.}$$

$$где\qquad R(s)=\int_0^s \alpha(y)dy,\qquad \theta(z,t)=(T_1-T_0)\times\Big[erfc(z/(2\sqrt{kt}))-$$

$$-\exp(\gamma z-\gamma^2 kt)erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}-\gamma\sqrt{kt}\right)\Big],\ erfc(\gamma)=1-\frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi\quad .$$

Здесь $T_{0,}$ $T_{1,}$ K,γ - фиксированные положительные числа, $\theta(z,t)$ - приращение температуры, $\alpha(y)$ - тепловое расширение, *к* - температуропроводность, $\gamma=q/n$, *q* - теплоотдача, *n* - теплопроводность.

Физический смысл прямой задачи термоупругости заключается в определении конвективного теплообмена *u(z,t),* происходящей в среде при начальных и граничных условиях

$$u(z,t)\big|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{2.}$$

$$\left.\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{3\lambda(0)+2\mu(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)}R(\theta(0,t)). \tag{3.}$$

Отметим, что граничное условие (3.) при $R(\theta(0,t)) = -\gamma(T_1 - T_0)$, моделирует тепловой удар на поверхности полупространства R_+, т.е. температура на границе повышается от T_0 до T_1. При этом между границей среды $x_0=0$ и средой происходит конвективный теплообмен.

Обратная задача. Определить функцию $\alpha(y)$ - теплового расширения из (1.) -(3.) при известной дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$u(z,t)\big|_{z=0} = g(t), \qquad t \in [0,T], \qquad 0 < T - const \;, \tag{4.}$$

и при известных функциях $\rho(z)$ - плотности среды, $\lambda(z)$, $\mu(z)$ - коэффициентов Ламэ.

Замечание. Определение коэффициента Ламэ $\lambda(z)$ при известных $\mu(z)$, $\rho(z)$ $\alpha(y)$, где они постоянны, рассмотрено нами в работе [4].

Рассмотрим случай, когда $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ – переменные функции. Тогда из (1.)-(4.) получим

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = \frac{\lambda(z)+2\mu(z)}{\rho(z)} * \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\lambda'(z)+2\mu'(z)}{\rho(z)} * u_z(z,t) -$$

$$- \frac{(3\lambda'(z)+2\mu'(z))}{\rho(z)} R(\Theta(z,t)) - \frac{3\lambda(z)+2\mu(z)}{\rho(z)} * R_z(\Theta(z,t))\,\Theta_z(z,t),$$

$$u(z,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad u_t(z,t)\big|_{t=0} = 0, \tag{5.}$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{3\lambda(0)+2\mu(0)}{\lambda(0)+2\mu(0)} * R(\Theta(0,t)), \qquad t \in R \quad ,$$

$$u(z,t)\big|_{z=0} = g(t), \qquad t \in [0,T] \quad , \tag{6.}$$

где $$R(\Theta(z,t)) = \int_0^{\theta(z,t)} \alpha(\eta)\,d\eta, \qquad R_z^{/}(\Theta(z,t)) = \alpha(\theta(z,t))\theta_z^{/}(z,t).$$

$\alpha(z)$ – неизвестная функция.

Относительно дополнительной информации $g(t)$ должны выполнятся:

$$u(0,0) = g(0) = 0, \qquad u_t\big|_{z=0} = g'(0) = 0, \; g(t) \in C^4(R); \tag{7.}$$

Введем замена переменных $x(z) = \int_0^z \sqrt{\rho(\xi)/(\lambda(\xi)+2\mu(\xi))}\,d\xi$ и замена новых функций

$$\upsilon(x(z),t) = u(z,t), \quad \overline{\lambda}(x(z)) = \lambda(z), \; \overline{\mu}(x(z)) = \mu(z), \; \overline{\rho}(x(z)) = \rho(z).$$

Вычислим

$$\upsilon(x(z),t) = u(z,t), \quad \overline{\lambda}(x(z)) = \lambda(z), \quad \overline{\rho}\,(x(z)) = \rho(z), \quad \overline{\mu}(x(z)) = \mu(z);$$

$$u_{tt} = \upsilon_{tt}, \; u_z = \upsilon_x(x,t)\cdot x_z'(z) = \upsilon_x(x,t)\cdot\sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x)+2\mu(z)}} \quad ,$$

$$u_{zz} = \upsilon_{xx}\cdot(x_z'(z))^2 + \upsilon_x\cdot x_{zz}'(z) = \upsilon_{xx}\sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x)+2\mu(x)}} + \left(\sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(x)+2\mu(x)}}\right)_x'\cdot\upsilon_x$$

$$\lambda'_z(z) = (\overline{\lambda}(x(z))_x'\cdot x_z'(z) = \overline{\lambda}_x'\cdot\sqrt{\frac{\overline{\rho}(x)}{\overline{\lambda}(x)+2\overline{\mu}(x)}} \;,$$

$$\mu'(z) = (\bar{\mu}(x(z))'_x \cdot x'_z(z) = \bar{\mu}'_x \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}(x)}{\bar{\lambda}(x) + 2\bar{\mu}(x)}}$$

$$\rho'(z) = (\bar{\rho}(x(z)))'_x \cdot x'_z(z) = \rho'_x \cdot \sqrt{\frac{\bar{\rho}(x)}{\bar{\lambda}(x) + 2\bar{\mu}(x)}}$$

Для краткости шапочки у всех новых уравнений убираем, тогда из (5.)-(7.)

$$\upsilon_{tt} = \upsilon_{xx} + A(x)\upsilon_x(x,t) - \Psi(x)\Theta(x,t)\Phi_x(x,t) - \\ - \Upsilon(x)\Phi(x,t), \quad x \in (0, T/2), \quad t \in (|x|, T - |x|) \qquad (8.)$$

$$\upsilon(x,t)|_{t=0} = 0, \qquad \upsilon_t(x,t)|_{t=0} = 0, \qquad (9.)$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right|_{z=0} = Z(0) * \Phi(0,t), \qquad t \in [0,T], \qquad (10.)$$

$$\upsilon(x,t)|_{x=0} = g(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (11.)$$

где $Z(0) = \frac{3\lambda(0) + 2\mu(0)}{\lambda(0) + 2\mu(0)} * \sqrt{\frac{\lambda(0) + 2\mu(0)}{\rho(0)}}$, $\Phi(x,t) = \int_0^{\theta(x,t)} \alpha(\eta)\, d\eta$,

$c(x) = \sqrt{\rho(x)/(\lambda(x) + 2\mu(x))}$, $\quad A(x) = c'(x)/c^2(x) + \frac{\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\lambda(x) + \mu(x)}$,

$\Psi(x) = c(x) * \frac{3\lambda(x) + 2\mu(x)}{\rho(x)}$, $\Upsilon(x) = c(x) * \frac{3\lambda'(x) + 2\mu'(x)}{\rho(x)}$.

Пусть относительно искомой функции $\Phi(x,t)$ выполнены условия

$$\Phi(x,t) \in C^2(R_+ \times R), \quad \Phi(x,t) \geq M > 0, \Phi(x,t) \in \Lambda_o \qquad (12.)$$

2. Конечно - разностное решение

Для численного решения введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{x_i = ih, t_k = kh, (ih, kh) : kh \in (0,T), \qquad kh \leq ih \leq T - ih\}$$

где h -сеточный шаг по z,t. Составим разностную схему обратной задачи (8.)-(11)

$$v_{\bar{t}t} = v_{x\bar{x}} + A_i v_{\bar{x}} - \psi_i \theta_i^k \Phi^k_{\bar{x},i} - Y_i \Phi_i^k, \quad (ih, kt) \in \Delta_h(T) \qquad (13.)$$

$$v_i^0 = 0 \qquad v_i^1 = 0 \qquad (14.)$$

$$v_{\bar{x}}\big|_{x=0} = Z_0 \Phi_0^k, \qquad (15.)$$

$$v_o^k = g^k \qquad (16.)$$

Исследуем сходимость решения обратной задачи (13.)-(16.) к точному решению обратной задачи (8.)-(11.).

Перепишем разностное уравнение (13.)

$$v_i^{k+1} = v_{i+1}^k - v_{i-1}^{\ k} + v_i^{k-1} + h^2 \cdot A_i \left[\frac{v_i^k - v_{i-1}^k}{h} \right] - h^2 \psi_i \theta_i^k \cdot \left[\frac{\Phi_i^k - \Phi_{i-1}^k}{h} \right] - h^2 Y_i \Phi_i^k$$

Последовательно подставляя в правую часть последнего уравнения выражения u^k_{i+1}, u^{k-1}_i, u^k_{i-1} и т.д., получим

$$v_i^{k+1} = \frac{g^{k+i+1} + g^{k-i-1}}{2} + h^2 A_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{v_{i-k-\mu+2p}^{\mu} - v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h} - \tag{17.}$$

$$-h^2 \psi_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{i-k-\mu+2p}^{\mu} \cdot \left[\frac{\hat{O}_{i-k-\mu+2p}^{\mu} - \hat{O}_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h} \right] - h^2 Y_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \hat{O}_{i-k-\mu+2p}^{\mu}$$

Приравнивая в (17.) $i=0$, получим

$$g^{k+1} = \frac{g^{k+1} + g^{k-1}}{2} + h^2 A_0 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{v_{-k-\mu+2p}^{\mu} - v_{-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h} - \tag{18.}$$

$$-h^2 \psi_0 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{-k-\mu+2p}^{\mu} \cdot \left[\frac{\hat{O}_{-k-\mu+2p}^{\mu} - \hat{O}_{-k-\mu+2p-1}^{\mu}}{h} \right] - h^2 Y_0 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \hat{O}_{-k-\mu+2p}^{\mu}$$

Из (18.) имеем

$$v_{i-1}^{k+1} = \frac{g^{k+i} + g^{k-i-2}}{2} + h^2 A_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} - v_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}}{h} -$$

$$-h^2 \psi_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} \cdot \left[\frac{\Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} - \Phi_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}}{h} \right] - h^2 Y_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \Phi_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}$$

Из (18.) и последнего получим

$$\frac{v_i^{k+1} - v_{i-1}^{k+1}}{h} = \frac{g^{k+i+1} + g^{k-i-1} - g^{k+i} - g^{k-i-2}}{2h} + A_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} (v_{i-k-\mu+2p}^{\mu} - v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}) -$$

$$-A_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} (v_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} - v_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}) - h^2 \psi_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{i-k-\mu+2p}^{\mu} (\hat{O}_{i-k-\mu+2p}^{\mu} - \hat{O}_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu}) +$$

$$+h^2 \psi_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} (\hat{O}_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} - \hat{O}_{i-k-\mu+2p-2}^{\mu}) -$$

$$-h^2 Y_i \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \hat{O}_{i-k-\mu+2p}^{\mu} + h^2 Y_{i-1} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \hat{O}_{i-k-\mu+2p-1}^{\mu} \quad . \tag{19.}$$

Из (15.) имеем

$$v_i^{k+1} = g^{k+1} + Z_0 h \Phi_0^{k+1} = \frac{g^{k+2} + g^{k-2}}{2} + h^2 A_1 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{v_{1-k-\mu-2p}^{\mu} - v_{-k-\mu+2p}^{\mu}}{h} -$$

$$- h^2 \psi_1 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{1-k-\mu+2p}^{\mu} \cdot \left[\frac{\Phi_{1-i-k-\mu+2p}^{\mu} - \Phi_{i-k-\mu+2p}^{\mu}}{h} \right] - h^2 Y_1 \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \Phi_{1-k-\mu+2p}^{\mu}$$

Отсюда

$$\hat{O}_0^{k+1} = \frac{g^{k+2} - 2g^{k+1} + g^{k-2}}{2 z_0 h} + \frac{A_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} (v_{1-k-\mu+2p}^{\mu} - v_{-k-\mu+3p}^{\mu}) -$$

$$- \frac{\psi_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \theta_{1-k-\mu+2p}^{\mu} \cdot (\hat{O}_{1-k-\mu+2p}^{\mu} - \hat{O}_{-k-\mu+2p}^{\mu}) - \frac{Y_1}{z_0} \sum_{p=1}^{k} \sum_{\mu=1}^{p} \hat{O}_{1-k-\mu+2p}^{\mu}. \qquad (20.)$$

Формулы (17.)- (20.) при $k = \overline{1, N-1}; \quad i = \overline{N-k, k}$ являются разностными аналогами формулы Даламбера.

По методике [3] можно показать сходимость пары u_i^{k+1}, Φ_1^{k+1} решение обратной задачи (13.)-(16.) к точному решению пары $u(z,t)$, $\Phi(0,t)$ обратной задачи (8.)-(11.).

Теорема. Пусть для $g(t) \in C^4([0,T])$ решение обратной задачи (5.)-(6.) существуют и удовлетворяет условию (12.) и пусть $u(x,t) \in C^4(\overline{\Delta(T)})$.Тогда приближенное решение , построенное конечно-разностным методом, обратной задачи (13.)-(16.) сходится к точному решению обратной задачи (8.)-(11.) в классе C со скоростью порядка $O(h)$ при некотором «малом» T.

Литература:

1. Апбасов С.О., Яхно В.Г. Определение характеристик изотропной вертикально - неоднородной несвязной термоупругой среды //Вопросы корректности задач математической физики и анализа. - Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1986. - С. 26-37.
2. Апбасов С.О., Яхно В,Г, Обратная задача динамической несвязной термоупругости //Некоторые вопросы дифференциальных уравнений и дискретной математики. -Новосибирск: НГУ, 1986. -С.63-70.
3. Коваленко А.Д. Термоупругость. - Киев: Вица школа, 1975.
4. Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А. Численное определение коэффициента Ламэ в динамической задаче термоупругости. Проблемы управления и информатики. Доклады 2 Межд. Конференции. Бишкек. 2007. С.67-71.
5. Сатыбаев А.Дж., Калдыбаева Г.А. Численное определение коэффициента Ламе μ(z) в динамической задаче термоупругости. Проблемы управления и информатики. Доклады 2 Межд. Конференции. Бишкек. 2007. С.67-71.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.