МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. ТРАНСПОРТ

Каденова З.А.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Z.A. Kadenova

REGULARIZATION AND UNIQUENESS OF THE SYSTEMS OF SOLUTIONS OF THE LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO VARIABLES IN UNLIMITED AREAS

УДК 517.968

Бул макалада эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер системасынын чектелбеген аймактагы чечимдеринин жалгыздыгы жана регуляризациясы жөнүндөгү теорема далилденген.

В настоящей статье доказана теорема единственности и регуляризация решений систем линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в неограниченных областях.

In the present article the theorem of uniqueness and regularization of solutions of the of systems linear integral equations of the first with two independent variables in unlimited areas is proved.

Рассмотрим систему уравнений

$$Ku \equiv \int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)dx + \int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dy =$$

$$= f(t,x), (t,x) \in G, \quad G = \{(t,x) \in R^2, \quad t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y), & t_0 \le t < \infty,\ a \le y \le x \le b; \\ B(t,x,y), & t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le y \le b, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$ - известные $n \times n$ – мерные матричные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t,x,y) : t_0 \le t < \infty,\ a \le y \le x \le b\},$$
$$G_2 = \{(t,x,y) : t_0 \le t < \infty,\ a \le x \le y \le b\},$$
$$G_3 = \{(t,x,s) : t_0 \le s \le t < \infty,\ a \le x \le b\},\ G^2 = G \times G,$$

$f(t,x)$-известная, $u(t,x)$ -неизвестная n -мерные вектор-функции.

Основные результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1-3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву.

Введем следующие обозначения:

1) Совокупность всех матриц, действующих в R^n обозначим M, < . , . > - скалярное произведение в R^n, $\|A\|, \|u\|$ – нормы соответственно $n \times n$ - мерной матрицы $A = (a_{ij}) \in M$ и n - мерного вектора u , т.е. для любых $u = (u_1, u_2, ..., u_n),\ \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, ..., \vartheta_n) \in R^n$

$$\langle u,\vartheta\rangle = u_1\vartheta_1 + u_2\vartheta_2 + \ldots + u_n\vartheta_n,\ \|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle},\quad \|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2\right)^{1/2};$$

2) $L_{2,n}(G)$ - пространство n – мерных векторов с элементами из $L_2(G)$, $\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_{2,n}(G)$ - т.е. для любого $u(t,x)\in L_{2,n}(G)$

$$\|u(t,x)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\|u(t,x)\|^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}};$$

3) $L_2\left((G^2);M\right)$ - пространство $n\times n$ - мерных матриц с элементами из $L_2(G^2)$,

$\|\cdot\|_{L_2}$ -норма в $L_2\left((G^2);M\right)$ - т.е. для любого $A(t,x,s,y)\in L_2\left((G^2);M\right)$

$$\|A(t,x,s,y)\|_{L_2} = \left(\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\|A(t,x,s,y)\|^2\,dydxdsdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Предполагается, что ядро $\|C(t,x,s,y)\|\in L_2(G^2)$ и $C(t,x,s,y) = C^*(s,y,t,x),\ (t,x,s,y)\in G^2$, где C^* - сопряженная матрица к матрице C. Тогда матричное ядро $C(t,x,s,y)$ разлагается в ряд в смысле сходимости в норме пространстве $L_{2,n}(G^2)$:

$$C(t,x,s,y) = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\begin{pmatrix}\varphi_1^{(i)}(t,x)\\ .\\ .\\ .\\ \varphi_n^{(i)}(t,x)\end{pmatrix}\left(\varphi_1^{(i)}(s,y),\ldots,\varphi_n^{(i)}(s,y)\right),\ l\le m\le\infty, \qquad (3)$$

где $\left\{\left(\varphi^{(i)}(t,x)\right) = \left(\varphi_\nu^{(i)}(t,x)\right)\right\}$ - ортонормированная последовательность собственных вектор - функций из $L_{2,n}(G)$, $\{\lambda_i\}$- последовательность соответствующих ненулевых собственных значений интегрального оператора C, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$, причем элементы $\{\lambda_i\}$ расположены в порядке убывания их модулей т.е. $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge\ \ldots$.

Обозначим

$$P(s,y,z) = A(s,y,z) + B^*(s,z,y),\quad (s,y,z)\in G_1. \qquad (4)$$

где $B^*(s,z,y)-$ сопряженная матрица и матрице $B(s,z,y)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1) $P^*(s,y,z) = P(s,y,z),(s,y,z)\in G_1$.

2) Матрицы $P(s,b,a),\ \lim\limits_{t\to\infty}H(t,y,t_0),\ P_z'(s,b,z),\ \lim\limits_{t\to\infty}H_\tau'(t,y,\tau)$- неотрицательны соответственно при всех значениях $s\in[t_0,\infty),\ y\in[a,b],\ (s,z),\ (\tau,y)\in G,$

$$\|P(s,b,a)\|\in C[t_0,\infty),\ \left\|\lim_{t\to\infty}H(t,y,t_0)\right\|\in C[a,b],\ \|P_z'(s,b,z)\|\in C(G),\ \left\|\lim_{t\to\infty}H_\tau'(t,y,\tau)\right\|\in C(G);$$

3) Матрицы $P_y'(s,y,a),\ H_s'(s,y,t_0),\ P_{zy}''(s,y,z),\ H_{\tau s}''(s,y,\tau)$- не положительны при всех значениях соответственно $(s,y)\in G,\ (s,y,z)\in G_1,\ (s,y,\tau)\in G_3$,

$$\|P_y'(s,y,a)\|\in C(G),\ \|H_s'(s,y,t_0)\|\in C(G),\ \|P_{zy}''(s,y,z)\|\in C(G_1),\ \|H_{\tau s}''(s,y,\tau)\|\in C(G_3);$$

4) Выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:

а) при почти всех $(s,y)\in G$ матрица $P_y'(s,y,a)$- отрицательны;

б) при почти всех $(s,z)\in G$ матрица $P_z'(s,b,z)$- положительны;

в) при почти всех $(s,y)\in G$ матрица $H_s'(s,y,t_0)$- отрицательны;

г) при почти всех $(\tau,y)\in G$ матрица $\lim\limits_{t\to\infty}H_\tau'(\infty,y,\tau)$ - положительны и для любого $v(t,x)\in L_{2,n}(G),$

$$\int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds\in L_{2,n}(G),$$

где $C[t_0,\infty),\ C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,\infty),\ G, G_1$ и G_3;

Теоремы 1. Пусть выполняются условия 1), 2), 3) и 4). Тогда решение системы (1) единственно в пространстве $L_{2,n}(G)$.

Доказательство. В силу (2) систему уравнений (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy+\int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy+\int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds+$$
$$+\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds=f(t,x),\ (t,x)\in G. \tag{5}$$

Обе части системы (5), скалярно умножая на $u(t,x)$ и интегрируя по области G, применяя формулу Дирихле и обозначения (4) получим

$$\int_{t_0}^\infty\int_a^b\left\langle\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)dz,u(s,y)\right\rangle dyds+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\left\langle\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)d\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy+$$
$$+\int_a^b\int_{t_0}^\infty\left\langle\int_{t_0}^\infty\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)dzd\tau,u(s,y)\right\rangle dsdy=\int_a^b\int_{t_0}^\infty\langle f(s,y),u(s,y)\rangle dsdy. \tag{7}$$

Преобразуем первый два интеграла левой части уравнения (7). Известно что, если К- самосопряженная матричная функция размеров n×n, то $\langle K\vartheta, \vartheta_s' \rangle = \frac{1}{2}\left(\langle K\vartheta, \vartheta \rangle\right)_s' - \frac{1}{2}\langle K_s'\vartheta, \vartheta \rangle;$ (8)

где ϑ - некоторый n мерный вектор - функция.

Далее, имея ввиду, что $\frac{\partial}{\partial \tau}\int_\tau^s u(\xi, y)d\xi = -u(\tau, y),$

с помощью интегрирования по частям и с учетом (8) после преобразования первый и второй слагаемые левой части (7), подставляя полученные и (3) в (7) получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left\langle P(s,b,a)\int_a^b u(s,\nu)d\nu, \int_a^b u(s,\nu)d\nu \right\rangle ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_y'(s,y,a)\int_a^y u(s,\nu)d\nu, \int_a^y u(s,\nu)d\nu \right\rangle dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\left\langle P_z'(s,b,z)\int_z^b u(s,\nu)d\nu, \int_z^b u(s,\nu)d\nu \right\rangle dzds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b\int_a^y\left\langle P_{zy}''(s,y,z)\int_z^y u(s,\nu)d\nu, \int_z^y u(s,\nu)d\nu \right\rangle dzdyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\left\langle \lim_{t\to\infty} H(t,y,t_0)\int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle H_s'(s,y,t_0)\int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{t_0}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle dsdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left\langle \lim_{t\to\infty} H_\tau'(t,y,\tau)\int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{\infty} u(\xi,y)d\xi \right\rangle d\tau dy -$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\int_{t_0}^{s}\left\langle H_{\tau s}''(s,y,\tau)\int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi, \int_{\tau}^{s} u(\xi,y)d\xi \right\rangle d\tau dsdy +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\left|\left\langle \varphi^{(i)}(s,y), u(s,y)\right\rangle\right|^2 dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^{\infty}\langle f(s,y), u(s,y)\rangle dsdy. \quad (9)$$

Пусть $f(t,x)=0,\quad (t,x)\in G.$ Тогда, учитывая условия 1), 2), 3), 4) и 5), из (9) имеем $u(t,x)=0$ при всех $(t,x)\in G.$ Теорема 1. доказана.

В силу вполне непрерывности и само сопряженности оператора С, порожденного матричным ядром $C(t,x,s,y)$ ортонормированная последовательность собственных вектор – функций $\{(\varphi^{\nu}(t,x)) = (\varphi_i^{(\nu)}(t,x))\}$ – полна в $L_{2,n}(G)$. Очевидно, что если $u(t,x) \in L_{2,n}(G)$, то

где $\quad \|u(t,x)\|_{L_2}^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|u^{(\nu)}\right|^2,\ u^{(\nu)} = \int_a^b \int_{t_0}^{\infty} \left\langle u(t,x), \varphi^{(\nu)}(t,x) \right\rangle dtdx, \quad (\nu = 1,2,\dots).$

Семейство множеств корректности, зависящее от параметра α, выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_{2,n}(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le c \right\}, \text{где } c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle u(t,x), \varphi^{(\nu)}(t,x) \right\rangle dxdt, \quad (\nu = 1,2,\dots,). \tag{10}$$

Пусть $f(t,x) \in K(M_\alpha)$, где оператор К определено по формуле (1).

Тогда система (1) имеет решение $u(t,x) \in M_\alpha$ и из последнего равенства, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \left| \int_{t_0}^{\infty} \int_a^b \left\langle f(t,x), u(t,x) \right\rangle dxdt \right|.$$

Отсюда, используя неравенства Гельдера, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \|f(t,x)\|_{L_{2,n}} \|u(t,x)\|_{L_{2,n}}. \tag{11}$$

С другой стороны

$$\|u(t,x)\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}}{\lambda_\nu^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \lambda_\nu^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left|u^{(\nu)}\right|^{\frac{2}{1+\alpha}} \le \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{-1}} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} \left|u^{(\nu)}\right|^2 \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \tag{12}$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера при $p = \frac{1+\alpha}{\alpha},\ q = 1+\alpha.$

Пусть $u(t,x) \in M_\alpha$.

$$\|u(t,x)\|_{L_2}^{\ 2} \le c^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\|f(t,x)\|_{L_2} \|u(t,x)\|_{L_2} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Отсюда получим следующую оценку устойчивости:

$$\|u(t,x)\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \|f(t,x)\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{13}$$

Таким образом, доказана теорема

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-3), $K(M_\alpha) \subset L_{2,n}(G)$- образ M_α при отображении К. Тогда решение системы (1) единственно в $L_{2,n}(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ оператор К$^{-1}$, обратный к К, равномерно непрерывен с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е. справедлива оценка (13).

Покажем, что решение системы уравнений

$$\varepsilon\vartheta(t,x,\varepsilon)+\int_a^b K(t,x,y)\vartheta(t,y,\varepsilon)dy+\int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)\vartheta(s,x)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)\vartheta(s,y,\varepsilon)dyds=f(t,x),(t,x)\in G, \qquad (14)$$

где $\varepsilon > 0$ - малый параметр будет регуляризирующим для системы уравнений (1) на множестве M_α .

В самом деле, сделав следующую подстановку в системе (14)

$\vartheta(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon)$, где $u(t,x)\in M_\alpha$ - решение системы (1), получим

$$\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)+\int_a^b K(t,x,y)\xi(t,y,\varepsilon)dy+\int_{t_0}^{\infty} H(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b C(t,x,s,y)\xi(s,y,\varepsilon)dyds=-\varepsilon u(t,x). \qquad (17)$$

Литература

1. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127, № 1. с. 31-33.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. Asanov A., M. Haluk Chelik, Kadenova Z. A. Uniqueness and Stability of Solutions of Linear Integral Equations of the First Kind with Two Variables - International journal of contemporary mathematical sciences Vol. 7, 2013, no. 19, 907 - 914.HIKARI Ltd.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Иманалиев Т.М.