Каденова З.А.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Z.A. Kadenova

UNIQUENESS AND STABILITY OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND WITH TWO VARIABLES

УДК: 517.968

Бул макалада эки өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелеринин чечимдеринин жалгыздыгы жана туруктуулугу жөнүндөгү теорема далилденген.

В настоящей статье доказана теорема единственности и устойчивости решений линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными.

In the present article the theorem of uniqueness and stability of solutions of the linear integral equations of the first with two independent variables.

Рассмотрим уравнения вида

$$\int_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)dx + \int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dy =$$

$$= f(t,x), (t,x)\in G, \quad G = \{(t,x)\in R^2, \quad t_0 \le t \le T,\ a \le x \le b\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y), \ t_0 \le t \le T; & a \le y \le x \le b; \\ B(t,x,y), \ t_0 \le t \le T; & a \le x \le y \le b, \end{cases} \tag{2}$$

$A(t,x,y),\ B(t,x,y),\ H(t,x,s),\ C(t,x,s,y)$ - известные функции, определенные соответственно в области

$$G_1 = \{(t,x,y):\ t_0 \le t \le T,\ a \le y \le x \le b\};$$
$$G_2 = \{(t,x,y):\ t_0 \le t \le T,\ a \le x \le y \le b\};$$
$$G_3 = \{(t,x,s):\ t_0 \le s \le t \le T,\ a \le x \le b\}, \quad G^2 = G\times G.$$

$f(t,x)$-известная, а $u(t,x)$- неизвестная функция, $(t,x)\in G$.

Раличные вопросы интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1,2], но основополагающие результаты для интегральных уравнений первого рода получены в [3-5].

Предполагается, что ядро $C(t,x,s,y)$- интегрируемо с квадратом в области G^2 т.е. $C(t,x,s,y)\in L_2(G^2)$ и разлагается в ряд

$$C(t,x,s,y)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(t,x)\varphi_i(s,y),\ \ m\le\infty,\ \ 0\le\lambda_i,\ \ i=1,2,...,m \qquad (3)$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...$ - собственные значения ядра $C(t,x,s,y)$, расположенные в порядке убывания их модулей $|\lambda_1|\ge|\lambda_2|\ge...$ и $\varphi_1(t,x),\ \varphi_2(t,x),...$ соответствующие ортонормированные собственные функции.

Обозначим

$$P(s,y,z)=A(s,y,z)+B(s,z,y),\ (s,y,z)\in G_1. \qquad (4)$$

Пусть выполняются следующие условия:

1) $P(s,b,a)\in C[t_0,T], P(s,b,a)\ge 0\ \forall s\in[t_0,T],$
$P'_y(s,y,a)\in C(G),\ P'_y(s,y,a)\le 0\ \forall(s,y)\in G,$
$P'_z(s,b,z)\in C(G),\ P'_z(s,b,z)\ge 0\ \ \forall(s,z)\in G,$
$P''_{zy}(s,y,z)\in C(G_1),\ P''_{zy}(s,y,z)\le 0,\ \ (s,y,z)\in G_1;$

2) $H(T,y,t_0)\in C[a,b],\ H(T,y,t_0)\ge 0\ \forall y\in[a,b],$
$H'_s(s,y,t_0)\in C(G),\ H'_s(s,y,t_0)\le 0\ \forall(s,y)\in G,$
$H'_\tau(T,y,\tau)\in C(G),\ H'_\tau(T,y,\tau)\ge 0\ \forall(y,\tau)\in G,$
$H''_{\tau s}(s,y,\tau)\in C(G_3),\ H''_{\tau s}(s,y,\tau)\le 0,\ \ (s,y,\tau)\in G_3$ и для любого

$$v(t,x)\in L_2(G),\ \int_a^x A(t,x,y)v(t,y)dy,\ \ \int_x^b B(t,x,y)v(t,y)dy,\ \int_{t_0}^t H(t,x,s)v(s,x)ds\in L_2(G),$$

где $C[t_0,T],\ C(G), C(G_1)$ и $C(G_3)$-пространство всех непрерывных и ограниченных функций соответственно в области $[t_0,T],\ G, G_1$ и G_3.

3) Выполняются хотя бы один из следующих четырех условий

а) при почти всех $(s,y)\in G\quad P'_y(s,y,a)<0;$

б) при почти всех $(s,z)\in G\quad P'_z(s,b,z)>0;$

в) при почти всех $(s,y)\in G\quad H'_s(s,y,t_0)<0;$

г) при почти всех $(\tau,y)\in G\quad H'_\tau(T,y,\tau)>0;$

4) Ядро $C(t,x,s,y)$– представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ неотрицательны.

5) Ядро $C(t,x,s,y)$ – представимо в виде (3) и в разложении (3) все элементы последовательности $\{\lambda_i\}$ положительны.

<u>Теорема1.</u> Пусть выполняются 1), 2), 3), и 4). Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

<u>Доказательство.</u> В силу (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\int_a^x A(t,x,y)u(t,y)dy + \int_x^b B(t,x,y)u(t,y)dy + \int_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds +$$

$$+\int_{t_0}^T\int_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds = f(t,x). \tag{5}$$

Обе части уравнения (5) умножим на функции $u(t,x)$, интегрируя по области G и применяя формулу Дирихле, учитывая (4), имеем:

$$\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P(s,y,z)u(s,z)u(s,y)dzdyds + \int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H(s,y,\tau)u(\tau,y)u(s,y)d\tau dsdy +$$

$$+\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^T\int_a^b C(s,y,\tau,z)u(\tau,z)u(s,y)dzd\tau dsdy = \int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{6}$$

Преобразуя первый два интеграла левой части уравнения (6) и учитывая (3), получим

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^T P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^T\int_a^b\int_a^y P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,\nu)d\nu\right)^2 dzdyds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H'_s(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 dsdy +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T H'_\tau(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^T\int_{t_0}^s H''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(\xi,y)d\xi\right)^2 d\tau dsdy + +$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i\left(\int_a^b\int_{t_0}^T \varphi(s,y)u(s,y)dsdy\right)^2 = \int_a^b\int_{t_0}^T f(s,y)u(s,y)dsdy. \tag{7}$$

Пусть $f(t,x)\equiv 0,\ (t,x)\in G.$

Тогда, учитывая условия 1), 2), 3) и 4) из (7), имеем

$$\int_{t_0}^s u(\xi,y)d\xi = 0,\quad (s,y)\in G \ \text{ или } \int_a^y u(s,\nu)d\nu = 0,\ (s,y)\in G.$$

Отсюда $u(t,x)=0,$ при всех $(t,x)\in[t_0,T]\times[a,b].$ Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1), 2) и 5). Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $L_2(G)$.

Семейство множеств корректностей M_α выделим следующим образом:

$$M_\alpha = \left\{ u(t,x) \in L_2(G) : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_i^{-\alpha} \left| u^{(\nu)} \right|^2 \le c \right\},$$

где $c > 0, \quad 0 < \alpha < \infty,$

$$u^{(\nu)} = \int_{t_0}^{T} \int_{a}^{b} u(t,x)\, \varphi_\nu(t,x) dx dt, \;\; \nu = 1,2,\ldots,\infty.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-2), $K(M_\alpha) \subset L_2(G)$- образ M_α при отображении К. Тогда решение уравнение (1) единственно в $L_2(G)$ и на множестве $K(M_\alpha)$ существует равномерно непрерывный оператор К$^{-1}$, обратный к К, с гёльдеровым показателем $\frac{\alpha}{2+\alpha}$, т.е.

$$\left\| u(t,x) \right\|_{L_2} \le c^{\frac{1}{2+\alpha}} \left\| f(t,x) \right\|_{L_2}^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}, \;\; 0 < \alpha < \infty. \tag{8}$$

Доказательство. Обе части уравнения (1) умножим на $u(t,x)$ и интегрируем по области G. Далее, интегрируя по частям, используя формулы Дирихле и учитывая (3) имеем

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} P(s,b,a)\left(\int_a^b u(s,v)dv\right)^2 ds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P'_y(s,y,a)\left(\int_a^y u(s,v)dv\right)^2 dyds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b P'_z(s,b,z)\left(\int_z^b u(s,v)dv\right)^2 dzds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\int_a^b\int_a^y P''_{zy}(s,y,z)\left(\int_z^y u(s,v)dv\right)^2 dzdyds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b H(T,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{T} u(v,y)dv\right)^2 dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} H'_s(s,y,t_0)\left(\int_{t_0}^{s} u(v,y)dv\right)^2 dsdy +$$
$$+\frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T} H'_\tau(T,y,\tau)\left(\int_\tau^T u(v,y)dv\right)^2 d\tau dy - \frac{1}{2}\int_a^b\int_{t_0}^{T}\int_{t_0}^{s} H''_{\tau s}(s,y,\tau)\left(\int_\tau^s u(v,y)dv\right)^2 d\tau dsdy +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 = \int_a^b\int_{t_0}^{T} f(t,x)u(t,x)dtdx. \tag{9}$$

В силу условий 1)-2) из (9) вытекает единственность решений уравнения (1) в пространстве $L_2(G)$. Из (8) имеем $\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu \left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \left\| f(t,x) \right\|_{L_2} \left\| u(t,x) \right\|_{L_2}.$ (10)

С другой стороны, если $f(t,x) \in K(M_\alpha)$, то $u(t,x) \in M_\alpha$ и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left|u^{(\nu)}\right|^2}{\lambda_\nu^{-1}}\right]^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \cdot \left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{-\alpha}\left|u^{(\nu)}\right|^2\right]^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

Отсюда, учитывая (10) и $u(t,x)\in M_\alpha$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|u^{(\nu)}\right|^2 \le \left[\left\|f(t,x)\right\|\left\|u(t,x)\right\|\right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} c^{\frac{1}{1+\alpha}}. \qquad (11)$$

Умножим обе части неравенства (10) на $\left\|u(t,x)\right\|^{\frac{-\alpha}{1+\alpha}}$, получим оценку (8).

Теорема 3 доказана.

Литература:

1. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтера первого и третьего рода.//Журнал вычислительной математики и математический физики. 1979.Т.19.№4. с. 970-989.
2. Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода. // ДАН СССР. 1959. Т.127. № 1. с. 31-33.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
4. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтера первого рода. // ДАН 2007. Т. 415. № 1. с. 14-17.
5. Асанов А., Каденова З.А. Регуляризация и устойчивость систем линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. // Вестник Самарского Государственного Технического Университета. Серия физико-математические науки. Самара: Сам ГТУ. 2005. №38. с. 11-14.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Иманалиев Т.М.