

Васильев И.Л., Стародумов О.И., Стародумов И.О.

РЕШЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ СТОКА РЕКИ С ДАННЫМИ SRTM-ТОПОГРАФИИ

I.L. Vasiliev, O.I. Starodumov, I.O. Starodumov

KINEMATIC EQUATION SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MODEL OF RIVER FLOW WITH SRTM-TOPOGRAPHY DATA

УДК: 556.5

В работе представлена одномерная дифференциальная модель Сен-Венана, а также ее диффузионное и кинематическое приближения, все они описывают свободное движение воды в открытом русле (реке). Для кинематического приближения, являющегося квазилинейным уравнением первого порядка, в стационарном случае найдено общее аналитическое решение; для нестационарного случая потребовалось разработать алгоритм поиска численного решения. Алгоритм был реализован в среде имитационного программирования Power Sim, фоновым достоинством которой является большой набор поддерживаемых форматов данных, а также инструментов создания пользовательского интерфейса и визуализации. В работе приводятся результаты решения тестовых задач и одной задачи практического характера. Для решения практической задачи была использована цифровая модель поверхности Земли, созданная на основе данных космической SR TM-топографии.

Saint-Venan one-dimensional differential model and its diffusion kinematic approximations are presented in this work. They describe the water free movement in the open river channel. In stationary case for kinematic approximation, being a one-order quasi-linear equation, a general analytical solution was found; for non-stationary conditions the algorithm of numerical solution search was developed. The algorithm was realized in the environment of simulation programming PowerSim, which advantage is a large set of supported data formats and of instruments of the user's interface creation and visualization. The results of solution of test problems and of a practical problem are set forth in the work. For the practical solution a digital model of the Earth's surface was used, created on the basis of space SRTM-topography data.

ГИДРАВЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕКИ СЕН-ВЕНАНА

Обратимся к одной и по сей день достаточно распространенной гидравлической модели течения воды в открытом русле, основанной на законах сохранения массы и импульса текущей жидкости и носящей имя французского ученого-инженера Баре де Сен-Венана (1797-1886 гг.).

Для этого введем предположения, будем считать, что

- Деформации русла не происходит.
- Водное тело несжимаемо и однородно.
- Давление внутри водного тела подчинено гидростатическому закону.
- Протяженность водотока значительно больше его ширины и глубины, кривизна и уклон русла малы.
- Как следствие, центробежные силы практически отсутствуют, свободная поверхность в поперечном сечении горизонтальна, вертикальное ускорение потока незначительно.
- Гидравлическое сопротивление движению водных струй учитывается с помощью эмпирической резистентной формулы Шези [1] для установившегося течения.

Усредним глубину по ширине, а расход воды по ширине и глубине потока.

Сделанное позволяет использовать для описания движение воды в реке одномерную дифференциальную модель Сен-Венана [2,3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f \right) = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

где (1) – уравнение баланса, (2) – уравнение движения,

x – протяженность по водотоку, (м)

t – время, (сек)

$A(x, t)$ – площадь живого сечения потока, (м²)

$Q(x, t)$ – мгновенный расход воды (разгрузка), (м³/се.

$q(x, t)$ – внешний водный источник, отнесенный к единице длины водотока (м²/се

g – гравитационное ускорение, (м/сек

$h(x, t)$ – глубина, (м)

$S_f(x)$ – уклон трения потока —

Глубина и уклон русла определяются следующим образом (см.Рис. 1.):

$$h = z - z_b, \quad (3)$$

где

z – высота уровня свободной поверхности (зеркала), (м)

z_b – высота русла. (м)

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

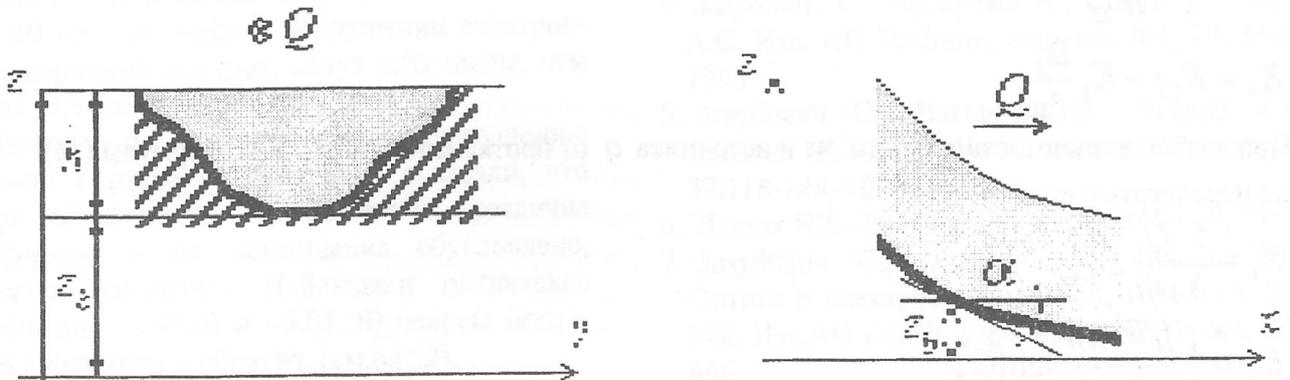


Рис. 1. Параметры водного потока

С учетом (3), (4) уравнение движения (2), можно переписать в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0. \quad (5)$$

Для расчета величины уклона трения потока на практике, как правило, используют формулу [1]

$$S_f = \frac{Q|Q|}{A^2 C^2 R}, \quad (6)$$

где R – гидравлический радиус, равный отношению площади живого сечения A к смоченному периметру χ этого сечения², C – коэффициент Шези зависящий, главным образом, от шероховатости русла $n(x)$. Наиболее часто для определения коэффициента Шези пользуются классической эмпирической формулой Маннинга [1,4]:

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6}. \quad (7)$$

Допустим, что первые два члена в уравнении (2) малы, и ими можно пренебречь. Допустим также, что $A = wh$, $R = h$, где $w(x)$ – ширина русла³. Из (1), (2), (6) с учетом (7) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{1}{w} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - q \right), \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= -\left(\frac{Qn}{wh^{5/3}} \right)^2 \operatorname{sgn}(Q). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Продифференцируем уравнение (8) по x , а уравнение (9) по t и приравняем правые части этих соотношений, считая левые части непрерывными, – получим диффузионное волновое уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + K_1 \frac{\partial Q}{\partial x} - K_2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - K_3 = 0, \quad (10)$$

где

$$K_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{h^{10/3}}{n^2 Q} \operatorname{sgn}(Q) + \frac{5}{3} \frac{Q}{wh}, \quad (11)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} w \frac{h^{10/3}}{n^2 Q} \operatorname{sgn}(Q),$$

$$K_3 = K_1 q - K_2 \frac{\partial q}{\partial x}.$$

При слабой зависимости ширины w и источника q от протяженности русла x формулы (11) можно переписать в виде

$$K_1 = \frac{5}{3} \frac{Q}{wh}, \quad (12)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \frac{h^{7/3}}{n^2} \frac{wh}{Q} \operatorname{sgn}(Q),$$

$$K_3 = K_1 q.$$

Далее. Будем считать пренебрежимо малыми и отбросим в уравнении (5) не два, а три первых члена. Тогда $S_0 = S_f$ и (6) равносильна формуле закона Шези для стационарного потока:

$$\frac{Q}{A} = C \sqrt{|S_0| R} \operatorname{sgn}(S_0). \quad (13)$$

Выразим Q из (13) и подставим полученное выражение в балансовое уравнение (1). Вновь полагая $A = wh$, $R = h$, получим так называемое кинематическое волновое уравнение

$$\frac{\partial(wh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{|S_0|}}{n} wh^{5/3} \right) \operatorname{sgn}(S_0) = q \quad (14)$$

Решение уравнений (1), (2), (10), (11), (14) позволит построить соответствующие этим приближениям гидравлические модели речной системы. Входными данными для таких моделей являются:

- Граф речной сети - перечень длин отдельных водотоков речной системы с указанием точек их соединения.

- Зависимость высоты над уровнем моря от протяженности по водотоку.
- Зависимость площади поперечного сечения водного потока от глубины.
- Шероховатость русла.
- Интенсивность внешнего источника, включающая обмен с грунтовыми водами, сброс воды или ее забор на хозяйственные нужды, талые воды, осадки, испарение.

Одна из практических постановок смешанных краевых задач для системы (1), (2) допускает задание начального условия:

$$Q(x,0) = \tilde{Q} = \text{const}; A(x,0) = \tilde{A}(x,t) \Big|_{t \rightarrow \infty} \quad (15)$$

$(\tilde{A}(x,t) \Big|_{t \rightarrow \infty})$ – установившееся значение площади живого сечения в аналогичной задаче

относительно Q и \tilde{A} с $Q(x,0) = 0$, $\tilde{A}(x,0) = 0$, $Q(x,t) \Big|_{x=x_{\text{left}}} = \tilde{Q}$, $q(x,t) = q(x,0)$

граничного условия на левой границе участка реки x_{left} (источник):

$$Q(x,t) \Big|_{x=x_{\text{left}}} = {}^{x=x_{\text{left}}}Q(t); {}^{x=x_{\text{left}}}Q(0) = \tilde{Q} \quad (16)$$

и граничного условия на правой границе участка реки x_{right} (свободное распространение):

$$\left(\frac{Q}{A} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_{\text{right}}} = \left(q - \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_{\text{right}}} \quad (17)$$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение (14) суть квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$K_1(x,t,h) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + K_2(x,t,h) \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = K_3(x,t), \quad (18)$$

В стационарном случае (14) – это обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{S_0(x)}}{n(x)} w(x) h^{5/3}(x) \right) = q(x), \quad (19)$$

частное решение которого, удовлетворяющее условию $h(x) \Big|_{x=x_{\text{left}}} = \tilde{h}(x) \Big|_{x=x_{\text{left}}}$ для задачи Коши,

имеет вид (см. Рис. 2, Рис. 3):

$$h(x) = \left(\frac{n(x)}{\sqrt{S_0(x)} w(x)} \left(\int q(x) dx + \left(\tilde{h}(x)^{5/3} \frac{\sqrt{S_0(x)} w(x)}{n(x)} - \int q(x) dx \right) \Big|_{x=x_{\text{left}}} \right) \right)^{3/5} \quad (20)$$

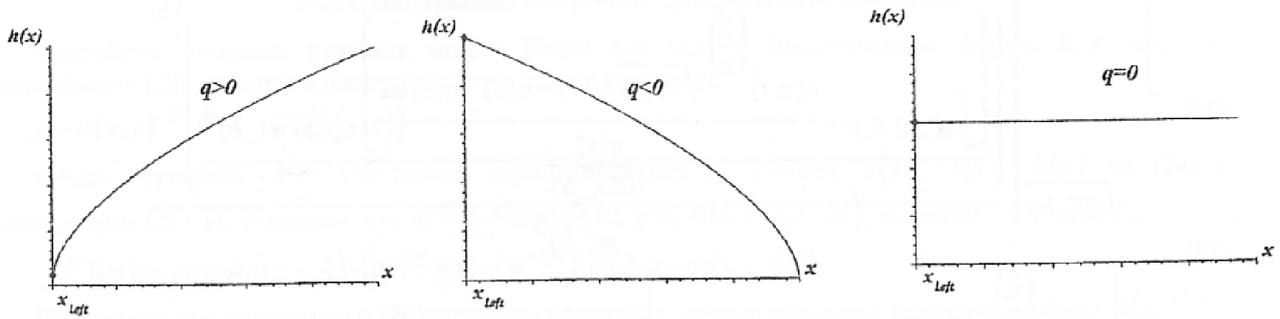


Рис. 2. Характер $h(x)$ в зависимости от знака q при постоянных w, n, S_0, q .

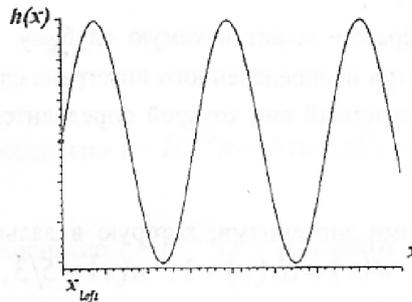


Рис. 3. Характер $h(x)$ при постоянных w, S_0 , нулевом q и $n(x) = a + b \sin(x)$.

Нестационарный случай. Будем полагать, что величины w, n, S_0, q в (14) зависят только от пространственной переменной x и не зависят от времени t , кроме того, будем считать ширину w , шероховатость n и уклон S_0 всюду положительными. В этом случае

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{5}{3} \frac{\sqrt{S_0(x)} w(x)}{n(x)} h(x, t)^{2/3}, \\
 K_2 &= w(x), \\
 K_3 &= q(x) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S_0(x)}{\partial x} - \frac{S_0(x)}{n(x)} \frac{\partial n(x)}{\partial x} + \frac{S_0(x)}{w(x)} \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right) \frac{w(x)}{\sqrt{S_0(x)} n(x)} h(x, t)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Проинтегрируем (18), (21) с помощью системы аналитических преобразований Maple [5]:

```

>eq:=diff(w(x)*h(x,t),t)+diff((S0(x)^(1/2)/n(x))*w(x)*h(x,t)^(5/3),x)=q(x):
>pdsolve(eq,h(x,t));

```

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} x \\ t = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \left(\frac{3}{5} \right) \\
 & \frac{n(_b)}{\sqrt{S0(_b)} \left(\frac{\int q(_b) d_b + \frac{h(x,t) \left(\frac{5}{3} \right) \sqrt{S0(x) w(x) - n(x) \int q(x) dx}{n(x)} n(_b) w(_b)^4}{\sqrt{S0(_b)}} \right)}{w(_b)^3} \right) \\
 & +_F1 \left(\frac{h(x,t) \left(\frac{5}{3} \right) \sqrt{S0(x) w(x) - n(x) \int q(x) dx}}{n(x)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Соотношение (22) неявным образом задает искомую глубину $h(x,t)$, в нем $_b$ – переменная интегрирования, которую после взятия неопределенного интеграла следует поменять на переменную x , $_F1$ – произвольная функция, конкретный вид которой определится после задания начальной кривой $\{x(s); t(s); h(s)\}$, где s – параметр.

Задача 1

Рассмотрим задачу с начальными значениями, которую в дальнейшем можно рассматривать как тестовую: $x_{left} = 0, x_{right} \rightarrow \infty, w(x) = S_0(x) = 1, n(x) = 5/3, q(x) = 0, h(x,0) = 4 - \sin(x), h(0,t) = 4 + \sin(t)$. Перепишем для нее кинематическое уравнение (14):

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + h(x,t)^{2/3} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = 0.
 \tag{23}$$

Зададим начальную кривую:

$$\{x(s) = -s(1 - \theta(s)); t(s) = s\theta(s); h(s) = 4 + \sin(s)\},
 \tag{24}$$

здесь $\theta(s) = \begin{cases} 0, s < 0 \\ 1, s > 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда. И с помощью Maple для уравнения (23) построим

интегральную поверхность, проходящую через кривую (24):

```

> with(PDEtools):
> eq:=diff(h(x,t),t)+(3/5)*diff(h(x,t)^(5/3),x)=0:
> PDEplot(eq,h(x,t),[-s*(1-Heaviside(s)),s*Heaviside(s),4+sin(s)],s=-
5..5,x=0..5,t=0..5,h=0..5.5);
    
```

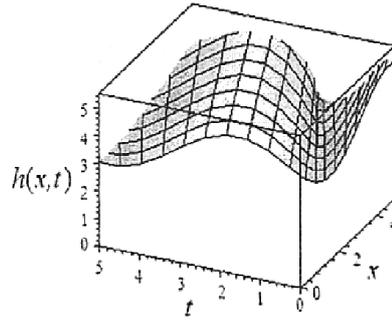


Рис. 4. Интегральная поверхность (23) с начальной кривой (25)

Попробуем отыскать решение задачи Коши для (23) в аналитической форме. Для этого из соотношения (22), которое в данном частном случае имеет вид

$$t - h(x,t)^{-2/3} x = {}_F1(h(x,t)) \quad (26)$$

найдем функцию ${}_F1$. Подставим параметрические выражения $x(s)$, $t(s)$, $h(s)$ из (24) в соотношение (26). И, учитывая, что $u = 4 + \sin(s) \Rightarrow s = \text{Arc sin}(u - 4)$, выразим ${}_F1$ через u :

$${}_F1(u) = \text{Arc sin}(u - 4) \cdot (u^{-2/3} + (1 - u^{-2/3}) \cdot \theta(\text{Arc sin}(u - 4))). \quad (27)$$

Подставляя это выражение в (26), получим уравнение, неявно задающее искомую глубину $h(x,t)$:

$$t - h^{-2/3} x - \text{Arc sin}(h - 4) \cdot (h^{-2/3} + (1 - h^{-2/3}) \cdot \theta(\text{Arc sin}(h - 4))) = 0. \quad (28)$$

Из (28) вытекает, что условие $\text{Arc sin}(h - 4) = 0$ выполняется при $h = 4$ на прямой, задаваемой уравнением

$$t = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} x. \quad (29)$$

При $\text{Arc sin}(h - 4) > 0$, (28) равносильно $t - h^{-2/3} x - \text{Arc sin}(h - 4) = 0$, или $\sin(t - h^{-2/3} x) = h - 4$.

При $\text{Arc sin}(h - 4) < 0$, (28) равносильно $t - h^{-2/3} (x + \text{Arc sin}(h - 4)) = 0$, или $\sin(x - h^{2/3} t) = 4 - h$.

Из (30), (31) видно, что при любых $x \geq 0, t \geq 0$ выполняется ограничение $3 \leq h(x, t) \leq 5$. В точке $s = 0$ производная $\frac{d}{ds} \text{Arc sin}(h(s) - 4) = \frac{d}{ds} \arcsin(h(s) - 4) = 1$, следовательно, выше прямой (29) $\text{Arc sin}(h - 4) > 0$ и «работает» уравнение (30), а ниже прямой (29) $\text{Arc sin}(h - 4) < 0$ и «работает» уравнение (31). Совместно эти уравнения описывают процесс гармонического колебания величины $h(x, t)$ возле уровня в 4 единицы, который также можно интерпретировать, как перенос $h(s)$ вдоль характеристической прямой (29).

Задача 2

Рассмотрим другую задачу: $x_{left} = 0, x_{right} \rightarrow \infty, w, S_0, n$ – положительные константы; $q \equiv 0, h(0, t) = h_1$ при $t > 0, h(x, 0) = h_2$ при $x > 0$. Перепишем для нее уравнение (14):

$$w \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{5 w \sqrt{S_0}}{3 n} \right) h(x, t)^{2/3} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = 0, \tag{32}$$

зададим начальную кривую:

$$\{x(s) = -s(1 - \theta(s)); t(s) = s\theta(s); h(s) = h_1\theta(s) + h_2(1 - \theta(s))\} \tag{33}$$

Задача (32), (33) сводится к системе обыкновенных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx(\xi; s)}{d\xi} = \left(\frac{5 w \sqrt{S_0}}{3 n} \right) h(\xi, s)^{2/3} \\ \frac{dt(\xi; s)}{d\xi} = w \\ \frac{dh(\xi; s)}{d\xi} = 0 \end{cases} \tag{34}$$

с начальными условиями

$$x|_{\xi=0} = -s(1 - \theta(s)), t|_{\xi=0} = s\theta(s), h|_{\xi=0} = h(s). \tag{35}$$

Решение задачи (34), (35) имеет вид:

$$h = h(s), \tag{36}$$

$$x = \frac{5}{3} h(s)^{2/3} \frac{\sqrt{S_0}}{n} w \xi - s + s\theta(s), \tag{37}$$

$$t = w\xi + s\theta(s) \tag{38}$$

Выразим из (37) $w\xi$ и подставим в (38). Учитывая определение $h(s)$, имеем:

$$t = \begin{cases} \frac{3}{5} h_1^{-2/3} \frac{n}{\sqrt{S_0}} x + s, & s > 0 \\ \frac{3}{5} h_2^{-2/3} \frac{n}{\sqrt{S_0}} (x + s), & s < 0 \end{cases} \tag{39}$$

При $s = 0$ вслед за h функция t терпит разрыв, скачком изменяясь на величину $\Delta t = \frac{3}{5} \frac{n}{\sqrt{S_0}} x (h_1^{-2/3} - h_2^{-2/3})$. Данное обстоятельство приводит к появлению в первом квадранте плоскости $\{(x, t)\}$ центрального угла (сектора), внутри которого обратная функция $s(x, t)$ и, как следствие, функция $h(x, t)$ либо не определены, либо неоднозначны (см. Рис. 5).

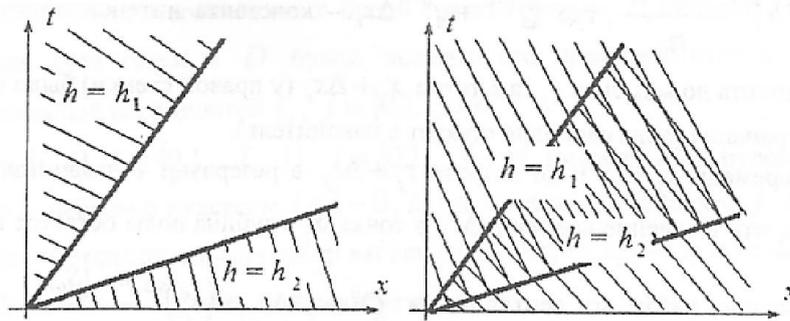


Рис. 5. Решение системы (39)

Поскольку функция $h(x, t)$ имеет конкретный физический смысл – глубина, в указанном секторе ее естественно определить однозначно. Функцию $s(x, t)$ можно доопределить в секторе по непрерывности значением 0, в таком случае функцию $h(x, t)$ в секторе можно считать постоянной и равной $h(0) = h_0$. Выбрать константу h_0 , по-видимому, лучше всего из соответствующего условия баланса.

МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ, ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ И ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Представим линейный участок реки в виде цепочки из открытых резервуаров для воды со свободной поверхностью, испытывающей всюду одинаковое атмосферное давление (см. Рис. 6). Каждый резервуар i имеет конечную длину Δx_i , он изготовлен из непроницаемого материала, у него достаточно высокие гладкие вертикальные стенки и прямоугольное (w_i) , всюду одинаково шероховатое (n_i) дно, имеющее нулевой крен и небольшой положительный уклон (S_{0i}) . В каждом резервуаре есть два входных отверстия в левой стенке – через них в резервуар вода закачивается, а также одно выходное отверстие в правой стенке – через него из резервуара вода откачивается. Выход любого резервуара i , кроме последнего, через емкость-накопитель соединен с одним из входов (на рис. он верхний) резервуара $i + 1$, насос, установленный между этими резервуарами может перекачивать воду из i -го резервуара в накопитель, а также из накопителя в $i + 1$ -ый резервуар в любом заданном режиме.

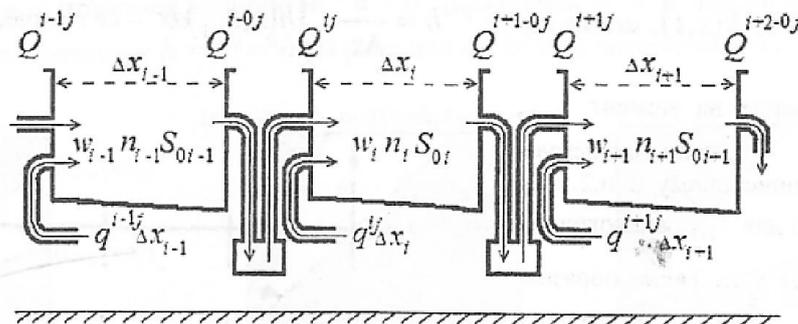


Рис. 6. Цепочка резервуаров

Режимы работы насосов – насоса, закачивающего воду через верхний вход первого резервуара, насосов, перекачивающих воду через емкости-накопители, насосов, закачивающих воду в резервуары через их нижние входы, а также насоса откачивающего воду из последнего резервуара – согласуем в предположении, что для любого резервуара i справедливы условия задачи 2, то есть:

1. Движение воды в резервуаре описывается уравнением (14) и формулами (7), (13).
2. На момент времени t_j резервуар i наполнен до уровня ${}^j h$. Для этого достаточно, чтобы до момента t_j в точке x_i (у левой стенки) долгое время выполнялось условие

Каждую ячейку сетки будем идентифицировать индексами ее левого нижнего узла: i – индекс по x и j – индекс по t ; количество интервалов по x будем считать равным I , количество интервалов по t равным J ; положение узла сетки в D будем задавать его пространственной координатой x_i , $i \in \{0, 1, \dots, I\}$, и его временной координатой t_j , $j \in \{0, 1, \dots, J\}$.

В пределах ячейки (i, j) , $i \in \{0, 1, \dots, I-1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, J-1\}$, нижнее ребро будем называть ребром с индексом i , верхнее – ребром с индексом $i+1-0$, левое – ребром с индексом j , правое – ребром с индексом $j+1-0$. Длина горизонтальных ребер ячейки равна $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и не зависит от i , длина вертикальных ребер равна $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и не зависит от j .

Будем считать исходные данные $w(x, t), n(x, t), S_0(x, t)$ положительными и постоянными внутри любой ячейки (i, j) функциями, то есть, кусочно постоянными функциями в пределах области D . Значения w, n и S_0 внутри ячейки (i, j) будем обозначать w_i, n_i и S_{0i} . Внешний источник $q(x, t)$ будем считать сосредоточенным на вертикальных ребрах ячеек, так что, $q(x, t) = \begin{cases} 0, & x \neq x_i \\ q^j(t), & x = x_i \end{cases}$, где $q^j(t)$ – кусочно постоянная функция, принимающая постоянные значения q^j на интервале $t_j < t < t_{j+1}$.

Рассмотрим отдельную ячейку (см.Рис. 8).

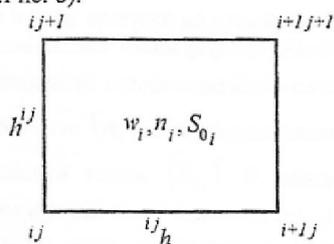


Рис. 8. Ячейка расчетной сетки

Будем считать глубину $h(x, t)$ на вертикальном ребре j известной константой $h^j > 0$, а на горизонтальном ребре i известной константой $i^j h > 0$. В ситуации $h^j = i^j h$ внутри ячейки и на ребрах $i+1-0, j+1-0$ выполняется $h = h^j = i^j h$. В ситуации же $h^j \neq i^j h$ возможны три случая (см.Рис. 9):

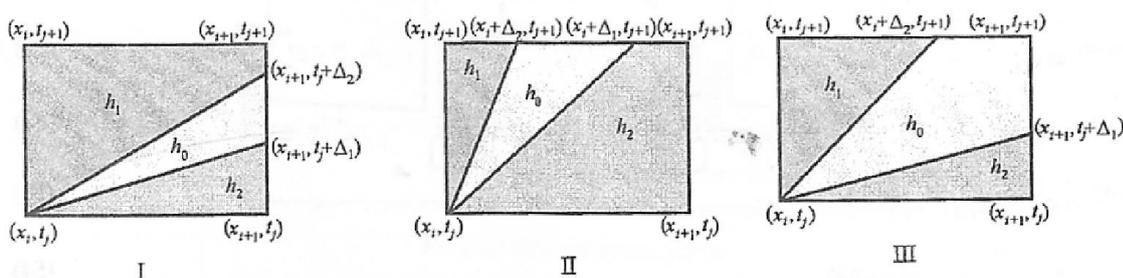


Рис. 9. Случаи изменения глубины в пределах ячейки расчетной сетки

Случай I:

$$\text{IF } \Delta x_i (i^j h - h^j) + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^j)^{5/3} \Delta t_j \geq 0 \text{ THEN}$$

$$h_1 = h^j, \tag{40}$$

$$h_2 = i^j h, \tag{41}$$

$Q^{j-0} + q^{j-0} \Delta x_i = (h^j)^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$, где $Q^{j-0} + q^{j-0} \Delta x_i$ – константа интенсивности притока (расхода)

воды в резервуар i вплоть до момента t_j , а в точке $x_i + \Delta x_i$ (у правой стенки) было обеспечено условие свободного распространения (вода свободно стекает в накопитель).

3. С момента времени $t_j + 0$ и до момент $t_j + \Delta t_j$ в резервуар i закачивается вода, при этом насосы работают так, что в течение времени Δt_j в точке x_i глубина воды остается постоянной, равной h^j .

Значение h^j можно найти из соотношения $Q^j + q^j \Delta x_i = (h^j)^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$, где $Q^j + q^j \Delta x_i$ – константа интенсивности притока воды в резервуар i с момента времени $t_j + 0$ и до момент $t_j + \Delta t_j$.

В точке $x_i + \Delta x_i$ все это время обеспечивается условие свободного распространения, которому

соответствует отток воды в накопитель с интенсивностью $Q^{i+1-0j}(t) = h(x_i + \Delta x_i, t)^{5/3} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i}$.

4. Отыскав функцию $h(x, t)$ – решение задачи 2 для $\{x_i \leq x \leq x_i + \Delta x_i; t_j < t \leq t_j + \Delta t_j\}$,

можно найти $Q^{i+1j} = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} Q^{i+1-0j}(t) dt = \frac{1}{\Delta t_j} \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} h(x_i + \Delta x_i, t)^{5/3} dt$ – среднее по времени

значение расхода у правой стенки резервуара i . С этим постоянным расходом воды через верхний вход мы будем искать решение задачи 2 для резервуара $i+1$. Добавив к Q^{i+1j} постоянную величину

$q^{i+1j} \Delta x_{i+1} = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{x_{i+1}}^{x_i + \Delta x_i} \int_{t_j}^{t_j + \Delta t_j} q(x, t) dt dx$ – расход от независимого источника, мы получим общую

интенсивность притока (расхода) воды в резервуар $i+1$ на промежутке с $t_j + 0$ по $t_j + \Delta t_j$. Повторим пп.3,4 для резервуара $i+1 \dots$ Подобным образом на промежутке времени с $t_j + 0$ по $t_j + \Delta t_j$ можно решить задачу 2 для всех резервуаров, то есть, для всего участка реки.

5. Зная функцию $h(x, t)$, можно найти $h^{j+1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_i}^{x_i + \Delta x_i} h(x, t_{j+1}) dx$ – ее среднее в пределах любого

резервуара i значение на момент t_{j+1} , соответствующее установившемуся режиму, подобно описанному в п.2. Мы пришли к ситуации для t_{j+1} , аналогичной ситуации на момент $t_j \dots$ Таким образом, повторяя пп.3-5, можно определить гидравлическое состояние реки на любой сколь угодно большой момент времени.

Прямоугольную область D изменения независимых переменных x и t покроем сеткой равномерной и по x , и по t (см. Рис. 7).

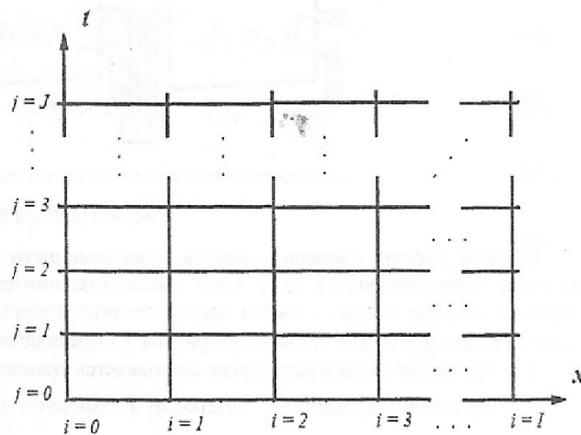


Рис. 7. Расчетная сетка

$$\Delta_1 = \frac{5}{3} \min(h_1, h_2)^{2/3} \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} \Delta x_i, \quad (42)$$

$$\Delta_2 = \frac{5}{3} \max(h_1, h_2)^{2/3} \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} \Delta x_i, \quad (43)$$

$$h_0 = \left[\frac{1}{\Delta_2 - \Delta_1} \left(\Delta x_i \frac{n_i}{\sqrt{S_{0i}}} (h_2 - h_1) + h_1^{5/3} \Delta_2 - h_2^{5/3} \Delta_1 \right) \right]^{3/5}, \quad (44)$$

$${}^{j+1}h = {}^{j+1-0}h = h_1, \quad (45)$$

$$h^{i+1-0j} = \left[\frac{h_2^{5/3} \Delta_1 + h_0^{5/3} (\Delta_2 - \Delta_1) + h_1^{5/3} (\Delta_j - \Delta_2)}{\Delta t_j} \right]^{3/5}, \quad (46)$$

$$Q^{i+1-0j} = \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^{i+1-0j})^{5/3}, \quad (47)$$

$$Q^{i+1j} = Q^{i+1-0j} + q^{i+1j} \Delta x_{i+1}, \quad (48)$$

$$h^{i+1j} = \left[\frac{n_{i+1}}{w_{i+1} \sqrt{S_{0i+1}}} Q^{i+1j} \right]^{3/5}. \quad (49)$$

ELSE

$${}^{j+1}h = {}^{j+1-0}h = {}^j h + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^j)^{5/3} \frac{\Delta t_j}{\Delta x_i}, \quad (50)$$

$$Q^{i+1-0j} = 0, \quad (51)$$

$$h^{i+1-0j} = 0, \quad (52)$$

$$Q^{i+1j} = q^{i+1j} \Delta x_{i+1}, \quad (53)$$

$$h^{i+1j} = \left[\frac{n_{i+1}}{w_{i+1} \sqrt{S_{0i+1}}} Q^{i+1j} \right]^{3/5}. \quad (54)$$

END IF

Случай II:

$$\text{IF } {}^j h \Delta x_i + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} \left((h^j)^{5/3} - ({}^j h)^{5/3} \right) \Delta t_j \geq 0 \text{ THEN}$$

$$h_1 = h^y, \quad (55)$$

$$h_2 = {}^y h, \quad (56)$$

$$\Delta_1 = \frac{3}{5} \min(h_1, h_2)^{-2/3} \frac{n_i}{\sqrt{S_{0i}}} \Delta t_j, \quad (57)$$

$$\Delta_2 = \frac{3}{5} \max(h_1, h_2)^{-2/3} \frac{n_i}{\sqrt{S_{0i}}} \Delta t_j, \quad (58)$$

$$h_0 = \frac{h_1 \Delta_1 - h_2 \Delta_2 + \sqrt{S_{0i}} \frac{h_1^{5/3} - h_2^{5/3}}{n_i} \Delta t_j}{\Delta_1 - \Delta_2}, \quad (59)$$

$${}^{y+1} h = {}^{y+1-0} h = \frac{h_1 \Delta_2 + h_0 (\Delta_1 - \Delta_2) + h_2 (\Delta x_i - \Delta_1)}{\Delta x_i}, \quad (60)$$

$$h^{i+1-0j} = h_2, \quad (61)$$

$$Q^{i+1-0j} = \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^{i+1-0j})^{5/3}, \quad (62)$$

$$Q^{i+1j} = Q^{i+1-0j} + q^{i+1j} \Delta x_{i+1}, \quad (63)$$

$$h^{i+1j} = \left[\frac{n_{i+1}}{w_{i+1} \sqrt{S_{0i+1}}} Q^{i+1j} \right]^{3/5}. \quad (64)$$

ELSE

$${}^{y+1} h = {}^{y+1-0} h = 0, \quad (65)$$

$$Q^{i+1-0j} = \left({}^y h \frac{\Delta x_i}{\Delta t_j} + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^y)^{5/3} \right) w_i, \quad (66)$$

$$h^{i+1-0j} = \left[\frac{n_i}{w_i \sqrt{S_{0i}}} Q^{i+1-0j} \right]^{3/5}, \quad (67)$$

$$Q^{i+1j} = Q^{i+1-0j} + q^{i+1j} \Delta x_{i+1}, \quad (68)$$

$$h^{i+1j} = \left[\frac{n_{i+1}}{w_{i+1} \sqrt{S_{0i+1}}} Q^{i+1j} \right]^{3/5}. \quad (69)$$

END IF

Случай III:

$$h_1 = h^j, \quad (70)$$

$$h_2 = {}^j h, \quad (71)$$

$$\Delta_1 = \frac{5}{3} \min(h_1, h_2)^{2/3} \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} \Delta x_i, \quad (72)$$

$$\Delta_2 = \frac{3}{5} \max(h_1, h_2)^{-2/3} \frac{n_i}{\sqrt{S_{0i}}} \Delta t_j, \quad (73)$$

$$h_0 = \text{RootOf} \left(h_0(\Delta x_i - \Delta_2) + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} h_0^{5/3} (\Delta t_j - \Delta_1) - (h_2 \Delta x_i - h_1 \Delta_2) - \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h_1^{5/3} \Delta t_j - h_2^{5/3} \Delta_1) = 0 \right) \quad (74)$$

$${}^{j+1} h = {}^{j+1-0} h = \frac{h_1 \Delta_2 + h_0 (\Delta x_i - \Delta_2)}{\Delta x_i}, \quad (75)$$

$$h^{i+1-0j} = \left[\frac{h_2^{5/3} \Delta_1 + h_0^{5/3} (\Delta t_j - \Delta_1)}{\Delta t_j} \right]^{3/5}, \quad (76)$$

$$Q^{i+1-0j} = \frac{w_i \sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^{i+1-0j})^{5/3}, \quad (77)$$

$$Q^{i+1j} = Q^{i+1-0j} + q^{i+1j} \Delta x_{i+1}, \quad (78)$$

$$h^{i+1j} = \left[\frac{n_{i+1}}{w_{i+1} \sqrt{S_{0i+1}}} Q^{i+1j} \right]^{3/5}. \quad (79)$$

$$\text{IF } h_0 > -\frac{h^j \Delta_2}{\Delta x_i - \Delta_2} + \frac{{}^j h \Delta x_i + \frac{\sqrt{S_{0i}}}{n_i} (h^j)^{5/3} \Delta t_j}{\Delta x_i - \Delta_2} \text{ THEN}$$

Вычисление ${}^{j+1-0} h$, ${}^{j+1} h$, Q^{i+1-0j} , h^{i+1-0j} , Q^{i+1j} , h^{i+1j} производим по формулам (50)-(54).

$$\text{ELSE IF } -\frac{h_1 \Delta_2}{\Delta x_i - \Delta_2} > h_0 \text{ THEN}$$

Вычисление ${}^{j+1-0} h$, ${}^{j+1} h$, Q^{i+1-0j} , h^{i+1-0j} , Q^{i+1j} , h^{i+1j} производим по формулам (65)-(69).

END IF

Формулы (50)-(54) и (65)-(69) – это вынужденная мера, здесь ради обеспечения баланса воды в ячейке производится корректировка коэффициента Шези. Скорректировать коэффициент Шези можно, например, путем умножения на величину $1/\lambda_{ij} > 0$. Приводить формулы для λ_{ij} и скорректированных $h_0, h_1, h_2, \Delta_1, \Delta_2$ излишне – для работы нашего алгоритма они не требуются.

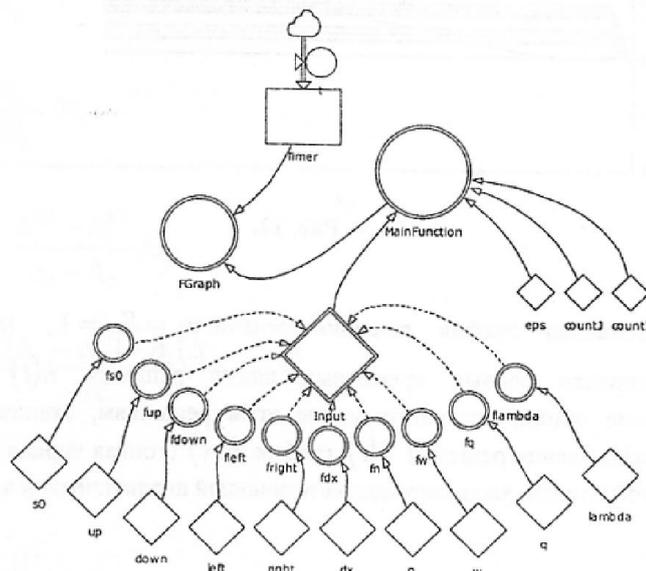


Рис. 10. Кинематическая модель реки в среде Powersim

Диаграмма на

Рис. 10 соответствует реализованной в среде Powersim/VBScript [6] кинематической модели (40)-(79). Функции $fs_0, f_{up}, f_{down}, f_{left}, f_{right}, f_{dx}, f_n, f_w, f_q, f_{lambda}$, используя параметры-константы $s_0, up, down, left, right, dx, n, w, q, lambda$, заполняют исходными данными массив Input. Функция MainFunction работает с сеткой размера countI, countJ и производит основные вычисления по формулам (40)-(79). Функция FGraph визуализирует результаты работы MainFunction.

Тестовые задачи

Ниже приведены графики численных решений тестовых задач и комментарии к ним. Все задачи решались для цепочки из 10 резервуаров длиной 665 единиц, последнее значение подобрано так, чтобы на Рис. 13 в последнем резервуаре уровень воды, оставаясь положительным, установился вблизи 0.

Задачи с условиями, согласованными с Рис. 2, Рис. 3:

1.1.

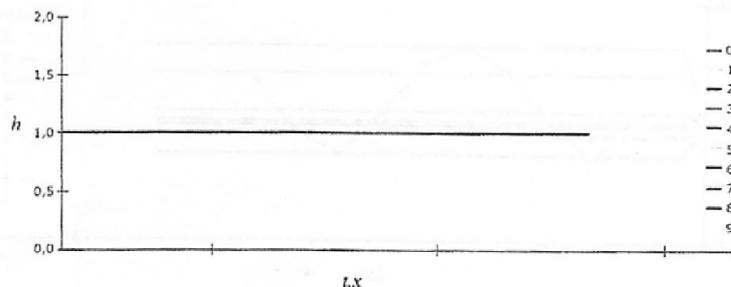


Рис. 11.

На Рис. 11 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1$, $n_i = 5/3$, $q_i = 0$; ${}^{i0}h = h^{0j} = 1$. Решения во всех 10 резервуарах идеальны, совпадают и равны 1 на всех ребрах во всех счетных ячейках.

1.2.

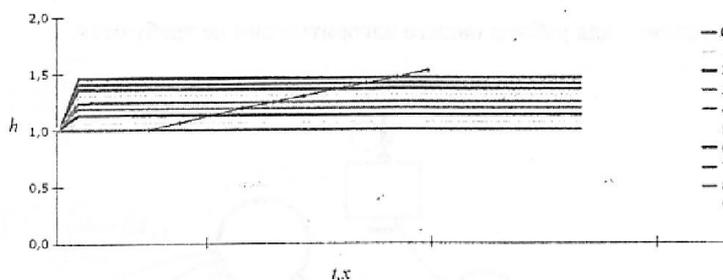


Рис. 12.

На Рис. 12 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1$, $n_i = 5/3$, $q_i = 1/1000$, ${}^{i0}h = h^{0j} = 1$. За несколько первых временных шагов решения $h(t)$ во всех резервуарах устанавливаются (цветные линии, соответствующие этим решениям, становятся горизонтальными). Построив на участке установления решений $h(t)$ график $h(x)$ (тонкая черная линия), можно отметить совпадение характера этой кривой, характеру соответствующей аналитической кривой на Рис. 2.

1.3.

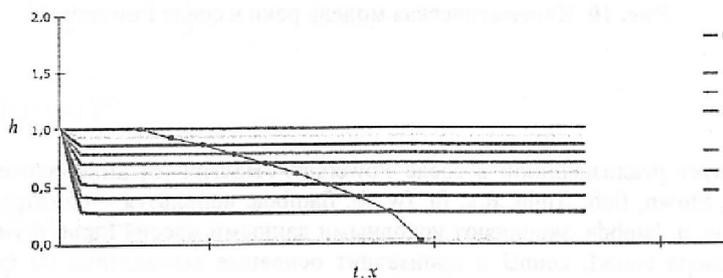


Рис. 13.

На Рис. 13 представлен график решения задачи, отличающейся от предыдущей лишь значением $q_i = -1/1000$. Здесь также за несколько первых шагов решения $h(t)$ во всех резервуарах устанавливаются, а построенная на участке установления этих решений кривая $h(x)$ (тонкая черная линия) по характеру напоминает соответствующую кривую на Рис. 2.

1.4.

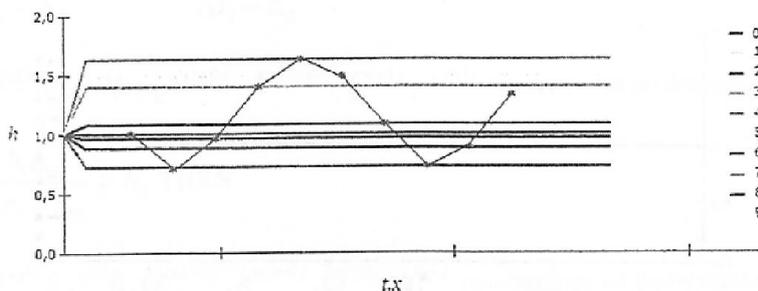


Рис. 14.

На Рис. 14 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1$, $n_i = 5/3 + \sin(i\Delta x_i)$, $q_i = 0$, $h^{i0} = h^{0j} = 1$. Решения $h(t)$ в этом случае также быстро устанавливаются. Кривая $h(x)$, построенная на участке установления всех $h(t)$, напоминает кривую на Рис. 3.

2. Нестационарная задача 1:

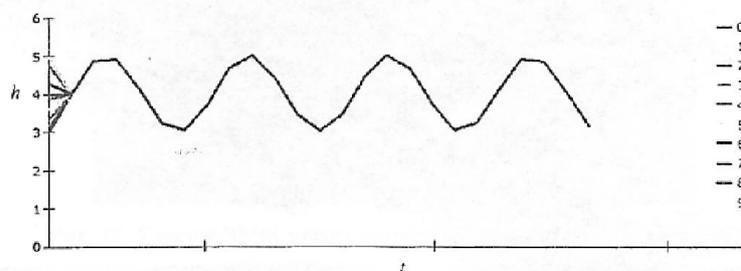


Рис. 15.

На Рис. 15 представлен график решения задачи: $w_i = S_{0i} = 1$, $n_i = 5/3$, $q_i = 0$, $h^{i0} = 4 - \sin(i\Delta x_i)$, $h^{0j} = 4 + \sin(j\Delta t_j)$. Решения $h(t)$ хорошо согласуются с аналитическим решением задачи 1, они относительно быстро выравнивают фазу своих колебаний и далее во всех резервуарах колебания $h(t)$ происходят практически синфазно.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДАННЫХ SRTM-ТОПОГРАФИИ

В настоящее время пользователям интернета доступна трехмерная цифровая модель поверхности Земли, созданная в результате обработки данных радарной топографической съемки, осуществленной в феврале 2000г. с борта американского космического корабля «Шаттл» (SRTM – Shuttle Radar Topographic Mission) [7]. Съемкой была охвачена почти вся территория земного шара между 60 градусами северной широты и 54 градусами южной широты, было собрано более 12 терабайт данных и после обработки определенная часть цифровой модели стала доступна пользователям.

Существует две версии данных: предварительная (версия 1, 2003г.) и окончательная (версия 2, 2005г.):

версия 1 - <ftp://e0srp01u.ecs.nasa.gov/srtm/version1/>

версия 2 - <ftp://e0srp01u.ecs.nasa.gov/srtm/version2/>

В обеих версиях данные представлены в географической система координат – WGS-84. Более точные данные версии 2 (SRTM-1) с горизонтальным разрешением – 30м (1 угловая секунда) свободно распространяются лишь для определенных территорий США, для остальной поверхности Земли свободно распространяются только данные версии 1 (SRTM-3) с горизонтальным разрешением – 90м (3 угловые секунды); вертикальное разрешение в обеих версиях – 20м. Все необработанные данные (raw data) и данные версии 2 распространяются только через министерство обороны США. Распространяемые файлы данных версии 1 представляют собой матрицы размером 1201×1201 (3601×3601 для односекундной версии 2) значений, которые могут быть импортированы в различные программы построения карт и геоинформационные системы.

В качестве объекта моделирования был выбран участок западного Большого Чуйского канала (ЗБЧК) между пятой и шестой малыми ГЭС Аламединского каскада⁴. Основными причинами, повлиявшими на

⁴ Справка: ЗБЧК – самый крупный в Киргизии ирригационно-энергетический канал. ЗБЧК берёт начало из реки Чу, сток реки Чу зарегулирован плотиной Ортоготокойского водохранилища. ЗБЧК пересекает с востока на запад всю Чуйскую долину, включая северную часть города Бишкека. Общая длина канала 145 км, площадь орошения 82 тыс. га. Нормальный расход воды в головной части канала 43,0 м³/с, форсированный расход 55 м³/с. Строительство начато в 1940г. и закончено в 1958. На ответвлении ЗБЧК расположен каскад Аламединских ГЭС, состоящий из восьми малых гидроэлектростанций: Лебединовской ГЭС, Аламединских ГЭС 1, 2, 3, 4, 5, 6, Малой Аламединской ГЭС. Пропускная способность этого ответвления, являющегося одновременно деривационным каналом для ГЭС 1, составляет 33 м³/с. Установленная мощность каскада 29,78 МВт. Располагаемая мощность меняется в течение года и зависит от расхода в ирригационной сети и стока реки Чу.

выбор этого объекта, являются: простота рельефа местности, достаточно большая длина, небольшой уклон и наличие информации об устройстве русла и номинальных расходах воды на границах участка.

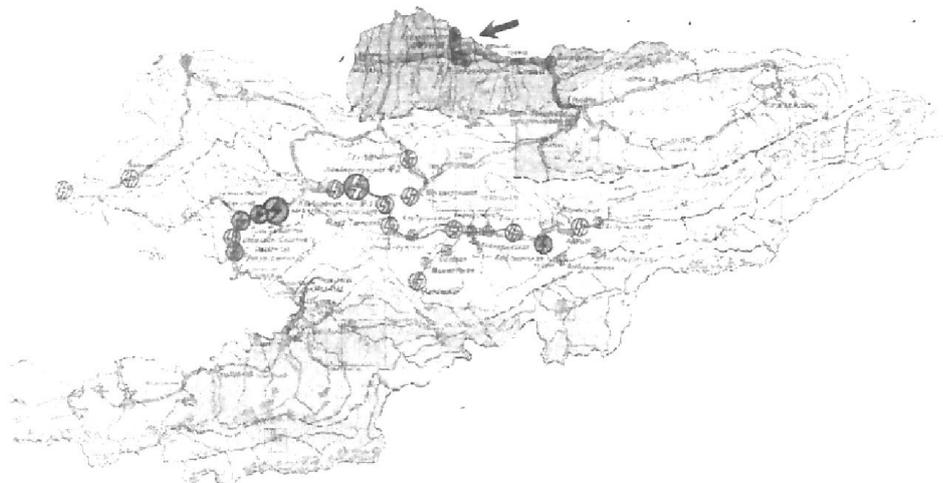


Рис. 16

Гидроэнергетические объекты Киргизии (1984г.).
Стрелка указывает на каскад Аламединских ГЭС.

Скорость движения воды в канале зависит от фильтрационных свойств грунта, в котором проходит канал, наличия и характера крепления или одежды стенок и дна канала. В каналах без облицовки расчетная скорость обычно близка к 0,6–0,7 м/с. В облицованных каналах скорость значительно выше и составляет 1,5–2 м/с и более. Поперечное сечение канала чаще всего имеет трапецидальную форму; лишь иногда в (скальных грунтах) ему придают форму прямоугольника. Коэффициент откосов (отношение заложения к высоте) канала трапецидального сечения зависит от характера грунта, а также от наличия и способа крепления откосов. Обычно коэффициент откосов k принимают в пределах от 1,5 до 3.

Облицовка каналов устраивается в целях снижения фильтрационных потерь, предохранения их от размыва и оползания откосов, снижения шероховатости поверхности их стенок, а также предотвращения зарастания канала водной растительностью. В отдельных случаях облицовка может служить для защиты канала от поступления в него загрязненных почвенных вод.

В каналах применяют следующие виды облицовок: гравийные отсыпки; мощение; битумное покрытие; глинистые экраны; бетонные и железобетонные покрытия.

Два первых типа одежды служат в основном для защиты откосов каналов от размыва и обрушения, остальные – для борьбы с фильтрацией.

Русло рассматриваемого участка канала облицовано бетонными плитами и имеет трапециевидную форму.

Для определения протяженности участка канала, его максимальной ширины и уклона были использованы возможности интернет-сервиса Google Earth [8], и программы OziExplorer [9]. С помощью Google Earth были импортированы нужные фотографии поверхности Земли, привязанные к файлам SRTM-3 (см. Рис. 17, Рис. 18). Затем участок канала был разбит на интервалы: вдоль средней линии водотока были расставлены метки, соответствующие узлам x_i расчетной сетки, и для каждой i -ой метки была определена ее высота z_i над уровнем моря (на Рис. 18 такими метками в виде булавок отмечены высоты над уровнем моря в метрах в верхнем и нижнем бьефах плотины шестой Аламединской ГЭС).



Рис. 17. Участок ЗБК между пятой и шестой Аламединскими ГЭС



Рис. 18. Плотина пятой и шестой Аламединских ГЭС (рядом с булавками – высоты над уровнем моря)

Далее, средствами OziExplorer были определены расстояния Δx_i , соответствующие горизонтальным размерам ячеек счетной сетки, а также ширины канала для каждого интервала, то есть, для каждой ячейки счетной сетки (см.

Рис. 19).

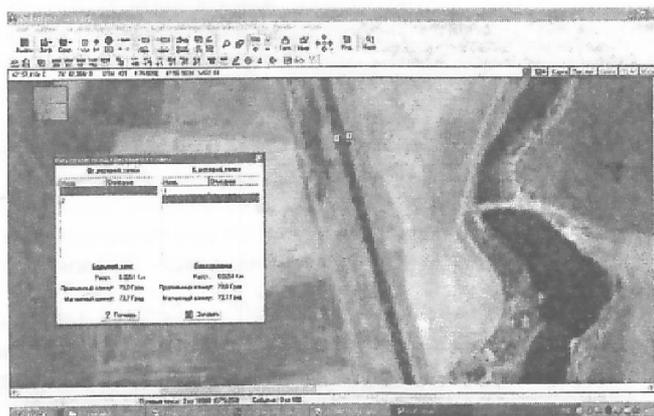


Рис. 19. Измерение расстояний с помощью OziExplorer

Все результаты были сведены в таблицу 1:

	$z_i - z_{i+1}$ (м)	Δx_i (м)	S_{0i}	w_i (м)	
	668.35-668	22,5	0,015909091	14,05	,08
	668-667	62,5	0,016129032	14,05	,08
	667-666	86,5	0,011627907	14,05	,08
	666-665	111,5	0,009009009	14,05	,08
	665-664	99,5	0,010101010	14,05	,08
	664-663	56,5	0,017857143	14,05	,08
	663-662	31,5	0,032258065	14,05	,08
	662-661	35,5	0,028571429	14,05	,08
	661-660	42,5	0,023809524	14,05	,08
	660-659	77,8	0,001285347	35,05	,06
0	659-658	82,1	0,001218027	30,05	,06
1	658-657	88,5	0,011363636	15,05	,08
2	657-656	74,5	0,013513514	15,05	,08
3	656-655	24,3	0,004115226	15,05	,08

Таблица 1.

Во всех ячейках было задано одно и то же начальное условие $h^{i0} = 0.3$ м, граничное условие $h^{0j} = 0.87$ м соответствовало потоку на левой границе $Q^{0j} = 23$ м³/с. Результаты расчета представлены на Рис. 20.

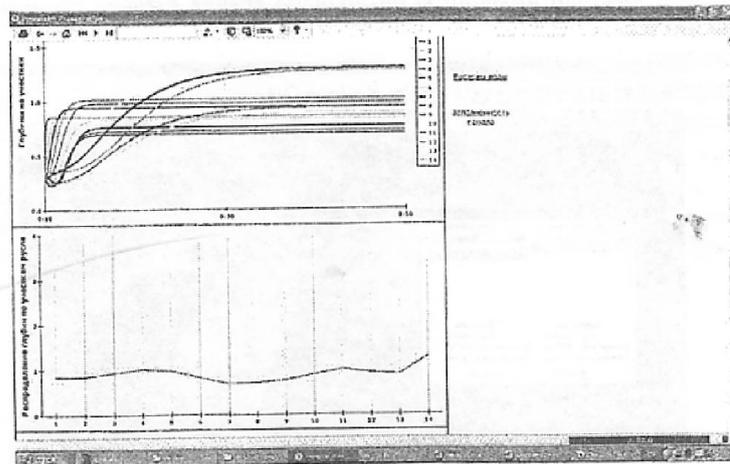


Рис. 20. Процесс установления уровня воды в канале.

На Рис. 21 показаны элементы пользовательского интерфейса, который использовался для ввода данных и представления результатов счета задачи.

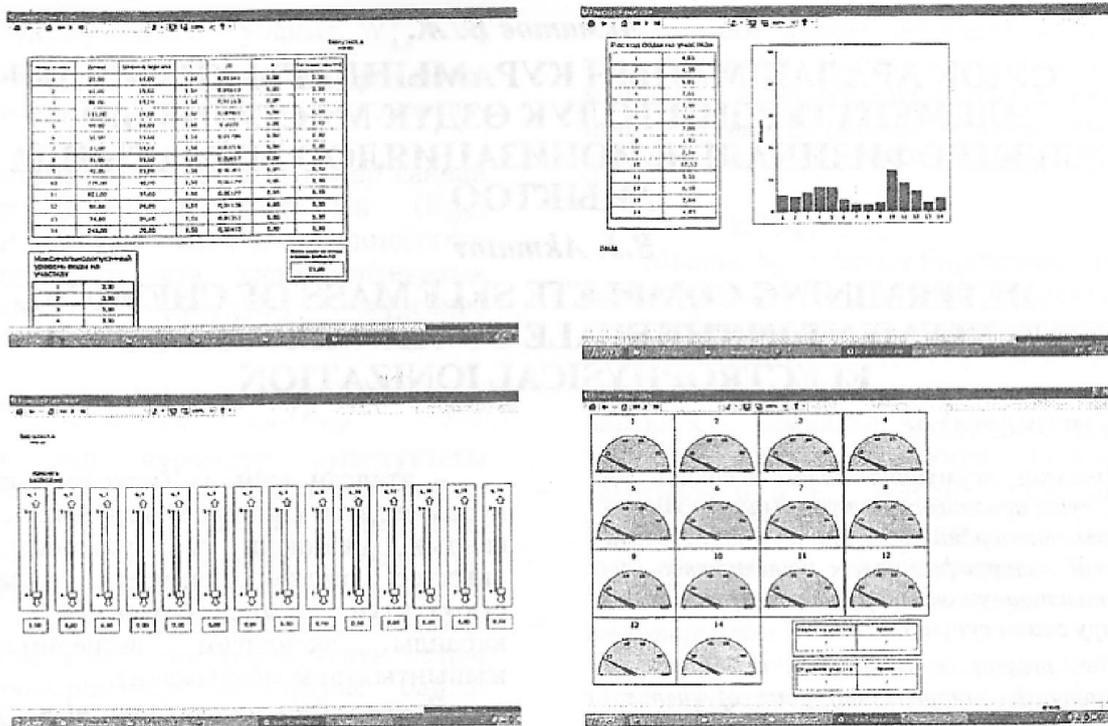


Рис. 21. Элементы пользовательского интерфейса

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей квалификационной работы является разработка оригинального алгоритма численного решения одномерного уравнения (14). Созданный алгоритм устойчив, поскольку для решения задачи требуется всего один раз в определенном порядке перебрать все ячейки счетной сетки. Показано, что с уменьшением размеров ячеек сетки, численное решение стремится к точному, то есть, обеспечена сходимость численных решений. Поскольку (14) является приближением модели руслового стока (1), (2) и диффузионной модели (10), (11), созданный алгоритм можно рекомендовать для поиска начального приближения при их численном решении.

В работе продемонстрирована техника использования цифровой модели поверхности Земли. Нет сомнений, что это очень перспективный способ получения дефицитных данных о рельефе интересующей местности.

Литература

1. Альтшуль А.Д. Гидравлическое сопротивление. – М., 1970. – 216 с.
2. Klohn-Crippen, (1999). Red River one-dimensional unsteady flow model, final report submitted to International Joint Commission
3. Ahmad S. and Simonovic S. P. Comparison of One-Dimensional and Two-Dimensional Hydrodynamic Modeling Approaches for Red River Basin, final report to International Joint Commission. – 1999.
4. Христанович С.А. Неустойчившееся движение в каналах и реках // Некоторые вопросы механики сплошной среды. – М.Л.: 1938. – С. 13-15.
5. <http://www.maplesoft.com/>
6. <http://www.powersim.com/>
7. <http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>
8. <http://earth.google.com/>
9. <http://www.ozieplorer.com/>

Рецензент: член-корр. НАН КР Орозобаков Т.