Рудаков С.Э.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ ЗАРЯДОВ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Rudakov S.E.

CALCULATION OF STATICALLY STABLE SYSTEMS OF CHARGES WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED DENSITY

УДК: 537.21

Выполнен расчет нескольких частных случаев статически устойчивых систем, состоящих из точечных зарядов и зарядов с распределенной плотностью. Подробно рассмотрены силы, возникающие при взаимодействии трехзарядовой и однозарядовой систем. Выведенные уравнения применены к расчету электростатической модели ядра атома.

In the article the author performs calculation of several particular cases of statically stable systems consisting of point charges and charges with uniformly distributed density. The forces appearing in the interaction of triple-charged and single-charged systems are considered in detail. The introduced equations have been applied to the calculation of electrostatic model of atomic nucleus.

Теорема Ирншоу не допускает устойчивого состояния неподвижных точечных электрических зарядов находящихся на конечных расстояниях друг от друга при отсутствии сил неэлектрического происхождения. Неустойчивость проявляется двояким образом: заряды, составляющие систему, либо все стягиваются в точку, либо все они или часть из них разлетаются в бесконечность. В первом случае система зарядов может обладать статической устойчивостью, если один или несколько из них распределены в пространстве. Рассмотрим несколько частных случаев, при которых система распределенных зарядов будет устойчива.

Будем рассматривать только единичные заряды $|q_1|=|q_2|=\ldots=|q_n|=1$. Пусть отрицательные заряды останутся точечными, а положительные равномерно распределены по шару с единичным радиусом $r=1$. Выберем единицы размерности таким образом, чтобы закон Кулона записался

$$F = \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2_{12}} = \frac{sign\ (q_1) \cdot sign\ (q_2)}{R^2_{12}}, \qquad (1)$$

где F – сила взаимодействия, а R_{12} – расстояние между центрами зарядов.

Положим, что заряды могут полностью или частично проникать друг в друга не нейтрализуясь.

Положим так же, что сила взаимодействия – отталкивания - двух зарядов одного знака, будет соответствовать закону Кулона на любых расстояниях - как для точечных, так и для распределенных зарядов. Если же два заряда – точечный и распределенный имеют разные знаки, то сила взаимодействия – притяжения – запишется, по аналогии с гравитирующими массами,

$$F_{12} = \begin{cases} -\dfrac{1}{R_{12}^{\ 2}}, & \text{åñëè} \quad R_{12} \geq 1 \\ -R_{12}, & \text{åñëè} \quad R_{12} < 1 \end{cases} \qquad (2)$$

При R=1 оба условия дадут F=1, причем это будет максимальная сила взаимодействия разноименных зарядов.

Силы взаимодействия могут быть другими, однако для того, чтобы центры зарядов не стянулись в точку важно, чтобы силы притяжения отставали от сил отталкивания по мере сближения центров зарядов.

Объединив условия (1) и (2) и учитывая, что $\left|q_i \cdot q_j\right| = 1$, сила взаимодействия двух зарядов в векторной форме запишется

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} = \begin{cases} \dfrac{1}{R_{ij}^{\ 2}} \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}_{ij}}{R_{ij}} = \dfrac{\boldsymbol{R}_{ij}}{R_{ij}^{\ 3}}, & \text{åñëè } q_i \cdot q_j > 0 \\ -\dfrac{\boldsymbol{R}_{ij}}{R_{ij}^{\ 3}}, & \text{åñëè } \left[\begin{array}{l} q_i \cdot q_j < 0 \\ R_{ij} \geq 1 \end{array}\right. \\ -\boldsymbol{R}_{ij}, & \text{åñëè } \left[\begin{array}{l} q_i \cdot q_j < 0 \\ R_{ij} < 1 \end{array}\right. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{F}_{ij}$ – сила, действующая на j-й заряд со стороны i-го заряда $|\boldsymbol{F}|=F$, $\boldsymbol{R}_{ij} = \{x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i\}$ - радиус-вектор проведенный от центра i-го к центру j-го заряда,

$|\boldsymbol{R}|=R=\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}$ - расстояние между центрами зарядов.

Уравнение равновесия для двух разноименных зарядов F_{12}-F_{21}=0

имеет решение при R_{12}=0. Отрицательный заряд окажется в центре шара – положительного заряда.

Рассмотрим систему, состоящую из трех зарядов: 1-й, 3-й положительные, 2-й – отрицательный: q_1=+1, q_2=-1, q_3=+1.

Заряды располагаются на одной прямой, в центре отрицательный заряд, положительные симметрично по сторонам. R_{12} (R_{13}) расстояние между 1-м и 2-м зарядами (1-м и 3-м). Чтобы найти расстояние, на котором система окажется устойчивой достаточно решить уравнение равновесия, например, для первого заряда

F_{21}-F_{31}=0

Соответствующая система из точечных зарядов стягивается в точку, поэтому уравнение будем решать исходя из того, что R_{21}<1

F_{21}=R_{21}

$$F_{31}=\frac{1}{R_{31}{}^2}$$

Учитывая, что R_{31}=2R_{21}

$$R_{21}-\frac{1}{(2R_{21})^2}=0$$

$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\approx 0.63$$

Таким образом, система из трех зарядов оказывается устойчивой, положительные заряды находятся на расстоянии $R_{31}=2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26$ и входят частично друг в друга, в центре пересечения лежит отрицательный заряд.

Трехзарядовая система имеет еще одно решение. Заряд 2 находится в центре заряда 1 (3), а заряд 3 (1) находится от них на некотором расстоянии. Данное решение отбрасываем.

Четырехзарядовая система, состоящая из отрицательного и трех положительных зарядов q1=q3=q4=+1, q2=-1 (Рис 1).

Из соображения симметрии сил ясно, что если существует устойчивое состояние четырех зарядовой системы, то:

– во-первых, центры всех четырех зарядов будут лежать в одной плоскости;

– во-вторых, центры положительных зарядов расположатся в вершинах равностороннего треугольника, а отрицательный заряд – в его центре;

– в-третьих, расчет сил, проведенный для любого положительного заряда, будет справедлив для двух других.

Система будет устойчивой, если расстояние между отрицательным зарядом и центром любого положительного, например R_{24}, будет меньше 1.

Расчет проведем для заряда q_4

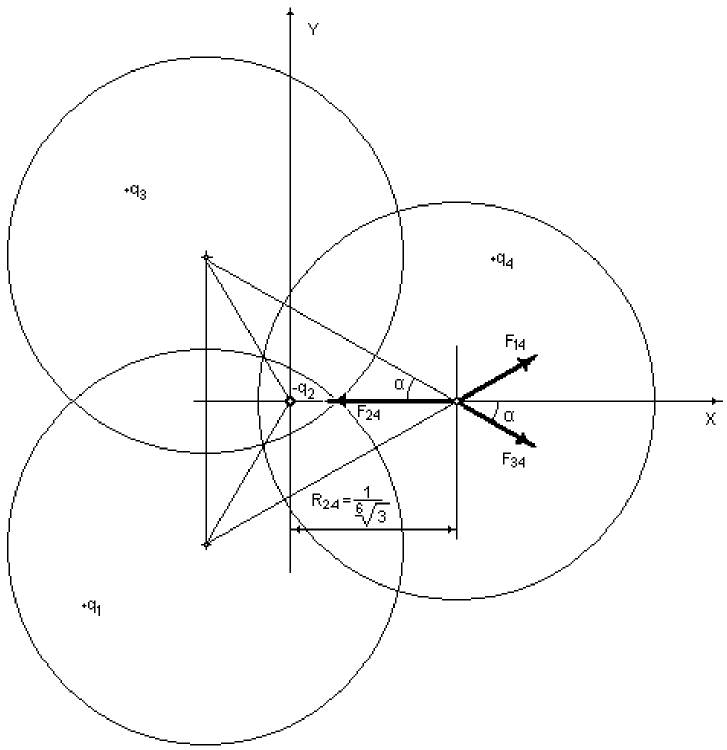

Рис.1 Устойчивая система из четырех зарядов (электростатическая модель $^{3}_{2}\mathrm{He}$)

Условие равновесия

$$\begin{cases} \text{Пр}_X \boldsymbol{F}_{14} + \text{Пр}_X \boldsymbol{F}_{34} - F_{24} = 0 \\ \text{Пр}_Y \boldsymbol{F}_{14} + \text{Пр}_Y \boldsymbol{F}_{34} = 0 \end{cases}$$

Так же из соображений симметрии видно, что $\text{Пр}_X\boldsymbol{F}_{14}=\text{Пр}_X\boldsymbol{F}_{34}$ и $\text{Пр}_Y\boldsymbol{F}_{14}=-\text{Пр}_Y\boldsymbol{F}_{34}$.
Условие равновесия примет вид:

$$2\cdot\text{Пр}_X\boldsymbol{F}_{14}-F_{24}=0,$$

далее, $\text{Пр}_X\boldsymbol{F}_{14}=F_{14}\cdot cos(\alpha)$. А так как треугольник $q_1q_3q_4$ равносторонний, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Пр}_X \boldsymbol{F}_{14} = F_{14} \cdot cos(\frac{\pi}{6}) = F_{14} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Силы определяются

$$F_{14} = \frac{1}{R_{14}{}^2} \quad (\textit{заряды одноименные})$$

$$F_{24} = R_{24} \quad (\textit{заряды разноименные и } R_{24} < 1)$$

Перепишем условие равновесия

$$2 \cdot \frac{1}{R_{14}^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - R_{24} = 0$$

Воспользуемся тем, что сторона равностороннего треугольника R_{14} в $\sqrt{3}$ раз больше радиуса описанной окружности R_{24}

$$R_{14} = R_{24}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{(R_{24}\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{3} = R_{24}$$

$$R_{24} = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}$$

Таким образом центры положительных зарядов располагаются в вершинах равностороннего треугольника на расстоянии $\frac{1}{\sqrt[6]{3}} \approx 0{,}83$ от отрицательного заряда, расположенного в центре треугольника.

Трехзарядовая система и положительный заряд, находящийся на некотором удалении испытывают взаимное отталкивание. Однако три распределенных положительных заряда, расположенных в вершинах равностороннего треугольника и один точечный отрицательный заряд в центре треугольника образуют устойчивую систему. Значит при некотором, достаточно близком расстоянии между положительным зарядом и трехзарядовой системой силы взаимного отталкивания сменяются силами взаимного притяжения. Оценим это расстояние. Для грубой оценки достаточно рассматривать сближение в статике.

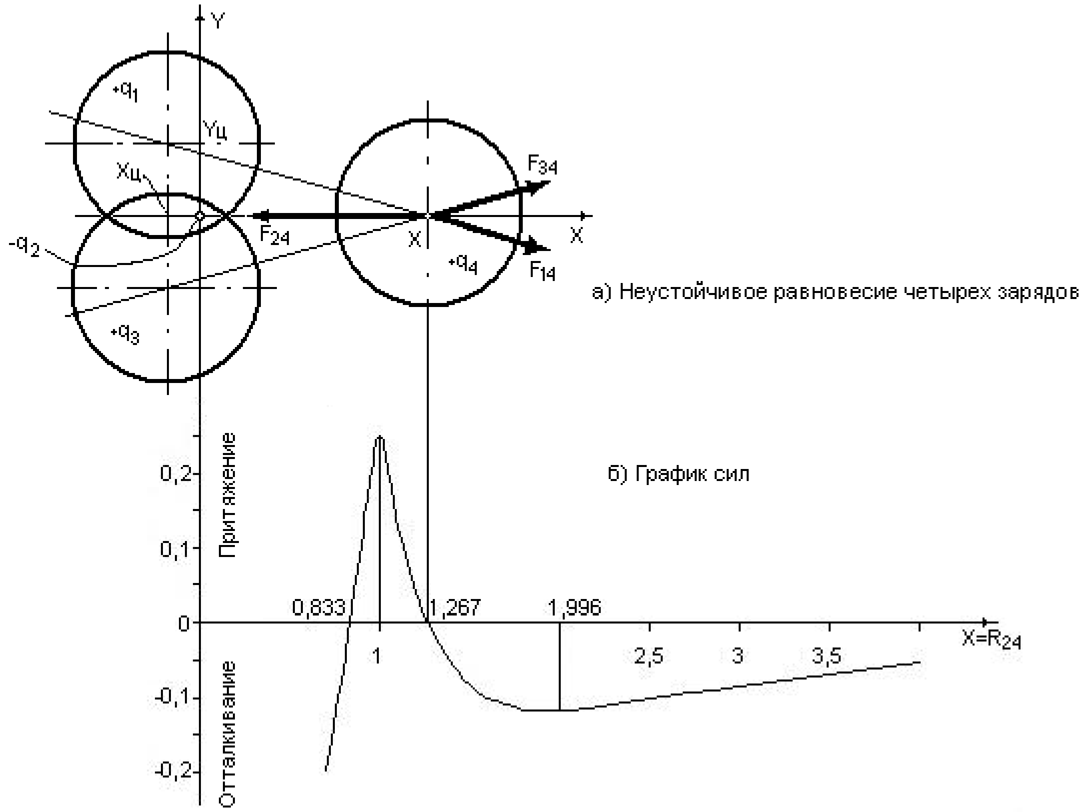

Рис. 2. Сила взаимодействия между трехзарядовой системой и положительным зарядом в зависимости от расстояния между ними

Таблица 1.

Расчет силы взаимодействия положительного заряда и трехзарядовой системы

$X_4=R_{24}$	X_1	Y_1	F_{14}	F_{24}	F_{34}	$\mathbf{F}_{14}+\mathbf{F}_{24}+\mathbf{F}_{34}$	
0,7	-0,45	0,74	0,53	0,87	0,53	-0,197	
0,8	-0,42	0,73	0,49	0,84	0,49	-0,049	
0,833	-0,42	0,72	0,48	0,83	0,48	0,00	Устойчивое равновесие
0,9	-0,40	0,71	0,46	0,82	0,46	0,10	
1	-0,37	0,70	0,42	0,79	0,42	0,25	Притяжение максимально
1,1	-0,35	0,69	0,39	0,77	0,39	0,13	
1,2	-0,33	0,68	0,36	0,76	0,36	0,04	
1,267	-0,31	0,68	0,34	0,75	0,34	0,00	Захват протона
1,3	-0,30	0,68	0,33	0,74	0,33	-0,02	
1,5	-0,26	0,66	0,28	0,72	0,28	-0,08	
1,7	-0,23	0,66	0,24	0,70	0,24	-0,11	
1,966	-0,19	0,65	0,20	0,68	0,20	-0,12	Отталкивание максимально
3	-0,10	0,64	0,10	0,64	0,10	-0,085	
4	-0,06	0,63	0,06	0,64	0,06	-0,05	

Схема расчета приведена на Рис. 2а, результаты расчетов в таблице 1. Расчет выполнялся численным методом. График зависимости силы взаимодействия от расстояния между системой и положительным зарядом представлен на Рис 2б. Таким образом, на расстоянии 1,267 сила отталкивания сменяется силой притяжения.

Составим уравнения для системы из N зарядов

Система уравнений равновесия для N зарядов

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1N} = 0 \\ \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2N} = 0 \\ \quad \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{N\,N-1} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$\boldsymbol{F}_{ij}$ находится из (3)

Для исключения множественности решений, появляющегося из-за шести степеней свободы твердого тела в трехмерном пространстве, необходимо доопределить систему уравнений. Поместим центр первого заряда в начало координат, потребуем, чтобы центр второго заряда лежал на оси X, а центр третьего лежал в плоскости X0Y.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = 0 \\ y_2 = z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases} , \tag{5}$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра i – го заряда.

Окончательно имеем:

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \ldots + \boldsymbol{F}_{1N} = 0 \\ \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \ldots + \boldsymbol{F}_{2N} = 0 \\ \quad \vdots \\ \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + \ldots + \boldsymbol{F}_{N\,N-1} = 0 \\ \boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{R}_{ij}}{R_{ij}^{3}}, \text{ если } q_i \cdot q_j > 0 \\ -\dfrac{\boldsymbol{R}_{ij}}{R_{ij}^{3}}, \text{ если } \left[\begin{array}{l} q_i \cdot q_j < 0 \\ R_{ij} \geq 1 \end{array}\right. \\ -\boldsymbol{R}_{ij}, \text{ если } \left[\begin{array}{l} qi \cdot qj < 0 \\ \boldsymbol{R}_{ij} < 1 \end{array}\right. \end{cases} \\ x_1 = y_1 = z_1 = 0 \\ y_2 = z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Данный метод применим, с частности, к расчету электростатической модели ядра атома. Магнитное взаимодействие, квантовомеханические эффекты и противоречие, вызываемое т. н. «азотной катастрофой» в расчет принимать не будем.

Примем, что элементарная частица - протон, электрон - это электромагнитная волна [3], [5, том 3, с. 228] существующая в ограниченном и покоящемся (движущемся с досветовой скоростью) пространстве. Следовательно, для элементарных частиц как для волн справедлив принцип суперпозиции – одну и ту же область пространства могут одновременно занимать две и более частицы.

Если за единицу длины принять условный радиус протона, за единицу заряда величину элементарного заряда, тогда двухзарядовой системе будет соответствовать электростатическая модель нейтрона, трехзарядовой – электростатическая модель ядра атома (ЭСМЯА) дейтерия, четырехзарядовой – ЭСМЯА гелия-3. Сближение трехзарядовой системы и положительного заряда Рис 2, таблица 1 является электростатической моделью реакции синтеза гелия-3: ${}_1^2D + {}_1^1p = {}_2^3He$

Приведем ещё несколько примеров.

ЭСМЯА несуществующего лития-4. Четыре протона расположены в вершинах тетраэдра на расстоянии $\dfrac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{6}}{2} \approx 0{,}97 \approx 1$ от центра тетраэдра, где расположен электрон.

Не существует решения для одного электрона и пяти протонов, что соответствовало бы несуществующему бериллию-5.

ЭСМЯА трития. Центры трех протонов располагаются в вершинах равностороннего треугольника со стороной $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}145$. Два электрона расположены на перпендикуляре, проведенном через центр треугольника, симметрично по обе стороны плоскости треугольника, расстояние между электронами $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0{,}87$.

ЭСМЯА гелия-4. Центры четырех протонов расположены в вершинах квадрата со стороной $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}} \approx 1{,}11$. Два электрона расположены на перпендикуляре, проведенном через центр квадрата, симметрично по обе стороны плоскости квадрата, расстояние между электронами $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0{,}79$.

Литература:

1. Григорьев И. С., Мейлихов Е. З. Физические величины. Справочник. М.: Энергоатомиздат 1991.
2. Кук Ш. Структура атомных ядер: Пер. с англ. М.:Энергоатомиздат, 1967.
3. Мартыненко Ю. О проблемах левитации в магнитных полях. www.valtar.ru/Magnets3/magnets7
4. Саврухин. Энергия как вектор. www.**scientific.ru**/dforum/altern/1151151857
5. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. «Мир», М.:1976.
6. Яворский Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: «Издательство ОНИКС», 2008.

Рецензент: профессор Эсенгельдиев Ч.Э.