Шаназаров Д.Г.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ В ПРОСТОМ КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

УДК: : 535.39

На основе оценок несобственных интегралов вдоль решения исходной системы получены критерии абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем в простом критическом случае. Особенностью представленного критерия является отсутствие каких-либо функций Ляпунова либо частотных характеристик.

The criterion of absolute stability of the equilibrium position of the regular systems in the simple critical case has been developed on the base of estimation of improper integrals. The difference between wide known criterions and proposed criterion is in the absence of Lyapunov functions and frequency characteristics.

Постановка задачи. Уравнения движения системы имеют вид

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma), \ \sigma = Dx + E\eta, \ x(0) = x_0, \ \eta(0) = \eta_0, \ t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, D, E - постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1, соответственно, матрица *A* - гурвицева, т.е. $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad \lambda_j(A), \quad j = \overline{1,n}$ - собственные значения матрицы *A*.

Полагаем, что

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 < \varphi(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \forall\sigma, \sigma \in R^1, \varphi(0) = 0, |\varphi(\sigma)| \le \varphi_*, 0 < \varphi < \infty\}. \tag{2}$$

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Dx_* + E\eta_* = 0$. Так как матрица *A* - гурвицева, $\varphi(0) = 0$, то в случае, когда *E* неособая матрица, система (1) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0, \ \eta_* = 0$), где $\sigma_* = 0$.

Говорят, что положение равновесия $x_* = 0, \ \eta_* = 0$ *системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если матрицы A,* $A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix}$, $0 < \mu < \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ *- гурвицевы и для всех* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством* $\lim_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$.

Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A, B, D, E, μ_0), при выполнении которых тривиальное решение $x_* = 0, \ \eta_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Ставятся следующая задача: Найти новый критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2), из которого следуют известные критерии абсолютной устойчивости.

Данная работа является продолжением научных исследований, приведенных в [1-3].

Неособое преобразование. Характеристический полином матрицы *A* имеет вид $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0$.

Лемма 1. Пусть вектор-строка θ порядка $1 \times n$ такой, что

$$\theta B = 0, \ \theta AB = 0, \ \theta A^2 B = 0, \ \ldots, \theta A^{n-2} B = 0, \ \theta A^{n-1} B \ne 0, \tag{3}$$

и пусть, кроме того, ранг матрицы

$$R = \left\| \theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^* \right\| \tag{4}$$

равен n, где (*) - знак транспонирования. Тогда:

1) уравнение движения системы (1) может быть представлено в следующем виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \ \dot{y}_2 = y_3, \ \ldots, \ \dot{y}_{n-1} = y_n,$$

$$\dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1} y_n + \theta A^{n-1} B\varphi(\sigma) = y_{n+1}, \tag{5}$$

$$\sigma = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+2} y_{n+2}, \ y_{n+2} = \eta, \tag{6}$$

где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, …, $y_n = \theta A^{n-1}x$, $Dx = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$, $\alpha_{n+2} = E$;

2) вдоль решения системы (1), (2) верны тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = \delta_1 y_1(t) + \delta_2 y_2(t) + \ldots + \delta_n y_n(t) + \delta_{n+1} y_{n+1}(t),\ t \in I, \quad (7)$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_1 y_1(t) + \beta_2 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_n(t) + \beta_{n+1} y_{n+1}(t),\ t \in I, \quad (8)$$

где $\dot{\sigma}(t) = Cx + R\varphi(\sigma)$, $C = DA$, $R = DB + E$, $Cx = \overline{\beta}_0 y_1 + \overline{\beta}_1 y_2 + \ldots + \overline{\beta}_{n-1} y_n$,

$\delta_1 = \chi^{-1}a_0, \delta_2 = \chi^{-1}a_1, \ldots, \delta_n = \chi^{-1}a_{n-1}, \delta_{n+1} = \chi^{-1}, \chi = \theta A^{n-1}B$,

$\beta_1 = \overline{\beta}_0 + (DB+E)\delta_1, \beta_2 = \overline{\beta}_1 + (DB+E)\delta_2, \ldots,$

$\beta_n = \overline{\beta}_{n-1} + (DB+E)\delta_n$, $\beta_{n+1} = (DB+E)\chi^{-1}$;

3) если $y_1 = \theta x = 0, \ldots, y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0$.

Доказательство. Если выполнено условие (3), то $\theta\dot{x} = \theta Ax$. Следовательно, $\dot{y}_1 = \theta\dot{x} = \theta Ax = y_2$. Далее, $\theta\ddot{x} = \theta A\dot{x} = \theta A^2 x = y_3, \ldots, \dot{y}_n = y_{n+1}$. Так как $rangR = n$, то векторы θ, $\theta A, \ldots, \theta A^{n-1}$ линейно независимы. Тогда имеет место единственное представление $D = \alpha_1\theta + \alpha_2\theta A + \ldots + \alpha_n\theta A^{n-1}$. Отсюда следует $\sigma = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n + E\eta$, где $E = \alpha_{n+2}$, $\eta = y_{n+2}$.

Из тождества $y_{n+1}(t) = -a_0 y_1(t) - a_1 y_2(t) - \ldots - a_{n-1} y_n(t) + \chi\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ следует равенство (7). Так как $\dot{\sigma} = Cx + B\varphi(\sigma)$, $C = \overline{\beta}_0\theta + \overline{\beta}_1\theta A + \ldots + \overline{\beta}_{n-1}\theta A^{n-1}$, то $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ определяется по формуле (8). Итак, вдоль решения системы (1), (2) верны тождества (5)-(8) при выполнении условий (3), (4). Утверждение 3) непосредственно следует из управляемости пары (A^*, θ^*).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и, пусть, кроме того, матрица A гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда

1) верны оценки

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot{x}(t)| \le c_1,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_2,\ \forall t,\ t \in I, \quad (9)$$

где $c_i = const < \infty$, $i = 0,1,2$. Кроме того, функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывны;

2) верны оценки

$$|y_i(t)| \le l_i,\ |\dot{y}_i(t)| \le \bar{l}_i,\ |y_{n+1}(t)| \le l_{n+1},\ |\dot{y}_{n+2}(t)| \le l_{n+2},\ t \in I, \quad (10)$$

где $l_1, \bar{l}_i = const > 0$, $i = \overline{1, n+2}$. Кроме того, функции $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $y_{n+2}(t)$, $t \in I$ – равномерно непрерывны.

Доказательство. Оценка (8) непосредственно следует из гурвицевости матрицы A и ограниченности функции $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Так как выполнены условия леммы 1 система (1), (2) равносильна (5), где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Поскольку $y_1(t) = \theta x(t)$, $y_2(t) = \theta Ax(t)$, …, $y_n(t) = \theta A^{n-1}x(t)$, $t \in I$, то из $|x(t)| \le c_0$, $t \in I$, следует $|y_i(t)| \le l_i$, $i = \overline{1,n}$. Из ограниченности функции $y_i(t)$, $t \in I$ и включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следуют $|\dot{y}_i(t)| \le \bar{l}_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$ -равномерно непрерывные функции. Из $|\dot{y}_n(t)| \le \bar{l}_n$, $t \in I$, следует $|y_{n+1}(t)| = |\dot{y}_n(t)| \le \bar{l}_n = l_{n+1}$, $t \in I$. Заметим, что $y_{n+2}(t) = \eta(t)$, $\dot{\eta}(t) = \varphi(\sigma(t))$. Тогда $|\dot{\eta}(t)| = |\varphi(\sigma(t))| \le \varphi_*$, $\forall t$, $t \in I$. Отсюда следует, что $|\dot{\eta}(t)| = |\dot{y}_{n+2}(t)| \le \varphi_* = l_{n+2}$, $t \in I$, $y_{n+2}(t)$, $t \in I$ - равномерно непрерывная функция.

Лемма 2 доказана.

Несобственные интегралы. Рассмотрим уравнения движения (5), и тождества (6), (7), когда функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда для любой величины* $P_0 > 0$ *, вдоль решения системы (5), (6) несобственный интеграл*

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\varphi(\sigma(t))P_0\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\mu_0^{-1}P_0\varphi(\sigma(t))\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\sum_{i=1}^{n+1} N_i y_i^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}S_1(t)\right]dt \geq 0\,, \qquad (11)$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt < \infty\,,\ S_1(t) = \frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(t)\,,\ t\in I\,. \qquad (12)$$

Доказательство. Так как $\sigma(t)$, $\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ определяются тождествами (6), (7) соответственно, то

$$\varphi(\sigma(t))P_i\sigma(t) = \left[\sum_{i=1}^{n}\delta_i y_i(t) + \delta_{n+1}y_{n+1}(t)\right]P_0\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(t) + \alpha_{n+2}y_{n+2}(t)\right] =$$

$$= P_0\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i y_i(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(t)\right) + P_0\delta_{n+1}y_{n+1}(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(t) + \varphi(\sigma(t))P_0\alpha_{n+2}\eta(t)\,,\ t\in I\,.$$

Заметим, что:

$$\int_0^T P_0\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i y_i(t)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(t)\right)dt = \int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n}N_{i1}y_i^2(t)\right]dt + \int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{11}(t)\right]dt\,,\ \left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{11}(t)\right]dt\right| < \infty\,, \qquad (13)$$

$$\int_0^T\left[P_0\delta_{n+1}y_{n+1}(t)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i(t)\right]dt = \int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n}N_{i2}y_i^2(t)\right]dt + \int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{12}(t)\right]dt\,,\ \left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{12}(t)\right]dt\right| < \infty\,, \qquad (14)$$

$$\int_0^T \varphi(\sigma(t))P_0\alpha_{n+2}\eta(t)dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(t)\right]dt\,. \qquad (15)$$

Аналогичным путем можно показать, что

$$-\int_0^T \mu_0^{-1}P_0\varphi^2(\sigma(t))dt = \int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n+1}N_{i3}y_i^2(t)\right]dt + \int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{13}(t)\right]dt\,,\ \left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_{13}(t)\right]dt\right| < \infty\,, \qquad (16)$$

Из формул (13)-(16) следует равенство (11), где $N_i = N_{i1} + N_{i2} + N_{i3}$, $i = \overline{1,n}$, $N_{n+1} = N_{n+1,3}$, $F_1(t) = F_{11}(t) + F_{12}(t) + F_{13}(t)$, $S_1(t) = \dfrac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(t)$, $t \in I$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$, *вдоль решения системы (5), (6) несобственный интеграл*

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i\, y_i\,(t)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n+1}\Gamma_i\, y_i^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt \geq 0, \qquad (17)$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt < \infty\,. \qquad (18)$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда для любой величины* τ *, вдоль решения системы (5), (6) несобственный интеграл*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\sum_{i=1}^{n+1} M_i y_i^2(t)\right]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt =$$

$$= -\int_0^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma, \qquad (19)$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt < \infty. \qquad (20)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1.

Абсолютная устойчивость. На основе оценок (11), (12), (17)-(20) может быть получен критерий абсолютной устойчивости регулируемых систем в простом критическом случае.

Теорема 4. П*усть выполнены следующие условия:*

1) матрицы $A,\ A_1(\mu),\ 0<\mu<\overline{\mu}_0,\ \mu_0<\overline{\mu}_0$ *- гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$*;*

2) существует вектор $\theta^*\in R^n$ *такой, что* $\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0$*, величина* $\chi = \theta A^{n-1}B \neq 0$*;*

3) ранг матрицы $R = \left\|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\right\|$ *равен* n*;*

4) выполнены равенства $N_i + \Gamma_i = M_i, i = \overline{0, n+1}$*, величина* $\tau \le 0$*,* $\alpha_{n+1} = E < 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Так как $I_1 > 0$, $I_2 \ge 0$, то при выполнении условия 4) имеем

$$0 < \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{[\varphi(\sigma(t))P_0\sigma(t) - \mu_0^{-1}P_0\varphi^2(\sigma(t))] + \left[\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i y_i(t)\right]^2\right\}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\varphi(\sigma(t))\tau\dot{\sigma}(t)dt +$$

$$+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\frac{d}{dt}[F_1(t)+F_2(t)-F_3(t)]\right\}dt + \frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\lim_{T\to\infty}\eta^2(T) - \frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(0) = \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma -$$

$$-\int_0^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\frac{d}{dt}[F_1(t)+F_2(t)-F_3(t)]\right\}dt + \frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\lim_{T\to\infty}\eta^2(T) - \frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(0), \qquad (21)$$

где

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\frac{d}{dt}[F_1(t)+F_2(t)-F_3(t)]\right\}dt < \infty,\ -\int_0^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma < \infty,\ \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma < 0,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\lim_{T\to\infty}\eta^2(T) < 0.$$

Из (21) следует, что функции $\sigma(t)$, $\eta(t)$, $t\in I$ - ограничены. В самом деле, если функция $\sigma(t)$, $t\in I$ неограниченна, т.е. $\lim_{T\to\infty}\sigma(T) = \pm\infty$, то $\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma = -\infty$. Аналогично, если функция $\eta(t)$, $t\in I$ неограниченна, то $\frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\lim_{T\to\infty}\eta^2(T) = -\infty$, где $\tau\le 0$, $\alpha_{n+2}<0$. В этих случаях из (21) имеем $0 < I_1 + I_2 < -\infty$, но этого не может быть.

Итак, функции $\sigma(t)$, $\eta(t)$, $t\in I$ - ограничены. Тогда из (21) следует, что

$$0 < I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T[\varphi(\sigma(t))P_0\sigma(t) - \mu_0^{-1}P_0\varphi^2(\sigma(t))]dt \le \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma -$$

$$-\int_0^{\sigma(0)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left\{\frac{d}{dt}[F_1(t)+F_2(t)-F_3(t)]\right\}dt+\frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\lim_{T\to\infty}\eta^2(T)-\frac{1}{2}\alpha_{n+2}P_0\eta^2(0)<\infty, \quad (22)$$

где $\sigma(t)$, $t\in I$ - ограниченная равномерно непрерывная функция.

Пусть функция $V(\sigma(t))=\varphi(\sigma(t))P_0\sigma(t)-\mu_0^{-1}P_0\varphi^2(\sigma(t))$, $t\in I$. Заметим, что $V(\sigma(t))>0$, $\forall t$, $t\in I$, функция $V(\sigma)$ - непрерывна по σ. Теперь оценка (22) запишется так

$$0<\lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt<\infty,\ V(0)=0, \quad (23)$$

где $\sigma(t)$, $t\in I$ - равномерно непрерывная функция. Из (23) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$. Так как матрица A - гурвицева, то $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$. Отсюда следует, что $x_*=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, $\sigma_*=\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$. Из равенства $\sigma_*=Dx_*+E\eta_*$, $E\neq 0$, имеем $\eta_*=0$.

Теорема 4 доказана.

Эффективность предлагаемого критерия абсолютной устойчивости и алгоритм его проверки покажем на одном примере.

Пример. Пусть уравнение движения системы имеет вид

$$\dot{x}_1=x_1-x_2,\ \dot{x}_2=3x_1-2x_2+\varphi(\sigma),\ \dot{\eta}=\varphi(\sigma),\ \sigma=-3x_1+x_2-1{,}5\eta,\ t\in I=[0,\infty), \quad (24)$$

$$\varphi(\sigma)\in\Phi_0=\{\varphi(\sigma)\in C(R^1,R^1)/0<\varphi(\sigma)\sigma<\mu_0\sigma^2,\ \varphi(0)=0,\ |\varphi(\sigma)|\le\varphi_*,\ \sigma\in R^1\}.$$

Для данного примера

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\ D=(-3,\quad 1),\ E=-1{,}5<0,\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta(\lambda)=\det(\lambda I_2-A)=\lambda^2+\lambda+1$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$, $\theta B=\theta_2=0$, $\theta AB=-\theta_1\neq 0$, где $a_0=1$, $a_1=1$, то $\theta=(1,\quad 0)\theta_1$, матрица A - гурвицева, $\dot{y}_1=y_2$, $\dot{y}_2=-y_1-y_2+\chi\varphi(\sigma)$, $\chi=-\theta_1\neq 0$.

Векторы $\theta=(1,\quad 0)\theta_1$, $\theta A=(1,\quad -1)\theta_1$, матрица $R=\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_1\\ 0 & -\theta_1\end{pmatrix}$, $rangR=2$.

Матрица $A_1(\mu)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 3-3\mu & -2+\mu & -1{,}5\mu\\ -3\mu & \mu & -1{,}5\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B\mu D & B\mu E\\ \mu D & \mu E\end{pmatrix}$.

Тогда $\Delta_1(\lambda)=\det(\lambda I_3-A_1)=\lambda^3+(0{,}5\mu+1)\lambda^2+(1-0{,}5\mu)\lambda+1{,}5\mu$. Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы $0<\mu<\overline{\mu}_0$, где $\overline{\mu}_0=-3+\sqrt{13}=0{,}605551275464$. Как следует из приведенных выше результатов, выполнены условия 1)-3) теоремы 4.

Легко убедиться в том, что:

$$\varphi(\sigma(t))=\chi^{-1}y_1+\chi^{-1}y_2+\chi^{-1}y_3,\ y_3=\dot{y}_2,$$
$$\sigma(t)=-\frac{2}{\theta_1}y_1-\frac{1}{\theta_1}y_2-1{,}5y_4,\ y_4=\eta, \quad (25)$$
$$\dot{\sigma}(t)=-\frac{2}{\theta_1}y_2-\frac{1}{\theta_1}y_3-1{,}5\varphi(\sigma(t)),\ t\in I.$$

Вводя обозначения $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\chi^{-1}$, $\alpha_1=-\dfrac{2}{\theta_1}$, $\alpha_2=-\dfrac{1}{\theta_1}$, $\alpha_4=-1{,}5$, $\beta_1=-1{,}5\chi^{-1}$, $\beta_2=-\dfrac{0{,}5}{\theta_1}$, $\beta_3=\dfrac{0{,}5}{\theta_1}$, соотношения (25) запишем в виде

$$\varphi(\sigma(t))=\delta_1 y_1(t)+\delta_2 y_2(t)+\delta_3 y_3(t),\ t\in I, \tag{26}$$

$$\sigma(t)=\alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)+\alpha_4 y_4(t),\ t\in I, \tag{27}$$

$$\dot\sigma(t)=\beta_1 y_2(t)+\beta_2 y_2(t)+\beta_3 y_3(t),\ t\in I, \tag{28}$$

где $\dot y_1=y_2$, $\dot y_2=y_3$, $\dot y_4=\delta_1 y_1+\delta_2 y_2+\delta_3 y_3$.

Заметим, что

$$\int_0^T y_1y_2dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[\frac12 y_1^2(t)\right]dt,\ \int_0^T y_1y_3dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[y_1(t)y_2(t)\right]dt-\int_0^T y_2^2(t)dt,$$

$$\int_0^T y_2y_3dt=\int_0^T\frac{d}{dt}\left[\frac12 y_2^2(t)\right]dt.$$

Вычислим несобственные интегралы:

$$I_1=\lim_{T\to\infty}\int_0^T[\varphi(\sigma(t))P_0\sigma(t)-\mu_0^{-1}P_0\varphi^2(\sigma(t))]dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[N_1y_1^2(t)+N_2y_2^2(t)+N_3y_3^2(t)\right]dt+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}S_1(t)\right]dt>0, \tag{29}$$

где $N_1=\left(\alpha_1\delta_1-\mu_0^{-1}P_0\delta_1^2\right)=\dfrac{2P_0}{\theta_1^2}-\dfrac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2}$,

$$N_2=\alpha_2\delta_2-\alpha_1\delta_3-\mu_0^{-1}P_0\delta_2^2+2\delta_1\delta_2\mu_0^{-1}P_0=-\frac{P_0}{\theta_1^2}+\frac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2},\ N_3=-\delta_3^2\mu_0^{-1}P_0=-\frac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2},$$

$$F_1(t)=\left[\frac12\left(\alpha_1\delta_1-\alpha_2\delta_1\right)-\delta_1\delta_2\mu_0^{-1}P_0\right]y_1^2(t)+\left[\frac12\alpha_2\delta_3-\mu_0^{-1}P_0\delta_2\delta_3\right]y_2^2(t)+$$

$$+\left(\alpha_1\delta_3-2\mu_0^{-1}P_0\delta_1\delta_3\right)y_1(t)y_2(t),\ S_1(t)=\frac12\alpha_4y_4^2(t);$$

$$I_2=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\gamma_1y_1(t)+\gamma_2y_2(t)+\gamma_3y_3(t)\right]^2dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\Gamma_1y_1^2(t)+\Gamma_2y_2^2(t)+\Gamma_3y_3^2(t)\right]dt+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt\ge 0, \tag{30}$$

где $\Gamma_1=\gamma_1^2$, $\Gamma_2=\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3$, $\Gamma_3=\gamma_3^2$, $F_2(t)=\gamma_1\gamma_2y_1^2(t)+2\gamma_1\gamma_3y_1(t)y_2(t)+\gamma_2\gamma_3y_2^2(t)$;

$$I_3=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\varphi(\sigma(t))\tau\dot\sigma(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[M_1y_1^2(t)+M_2y_2^2(t)+M_3y_3^2(t)\right]dt+\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt, \tag{31}$$

где

$$M_1=\tau\delta_1\beta_1=-\frac{0{,}5\tau}{\theta_1^2},\ M_2=\tau\delta_2\beta_2-\tau\delta_3\beta_1-\tau\delta_1\beta_3=\frac{2{,}5\tau}{\theta_1^2},\ M_3=\tau\delta_3\beta_3=-\frac{0{,}5\tau}{\theta_1^2},$$

$$F_3(t)=\frac{1}{2}\left(\tau\delta_2\beta_1+\tau\delta_1\beta_2\right)y_1^2(t)+\left(\tau\delta_3\beta_1+\tau\delta_1\beta_3\right)y_1(t)y_2(t)+\frac{1}{2}\tau\left(\delta_3\beta_2+\delta_2\beta_3\right)y_3^2(t)\,,\ t\in I\,.$$

Из (29)-(31) следует, что условия 4) теоремы 4 запишутся так:

$$\frac{2P_0}{\theta_1^2}-\frac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2}+\gamma_1^2=-\frac{1{,}5\tau}{\theta_1^2}\,, \tag{32}$$

$$-\frac{P_0}{\theta_1^2}+\frac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2}+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=\frac{2{,}5\tau}{\theta_1^2}\,, \tag{33}$$

$$-\frac{\mu_0^{-1}P_0}{\theta_1^2}+\gamma_3^2=-\frac{0{,}5\tau}{\theta_1^2}\,, \tag{34}$$

где $\tau\le 0$, $E=-1{,}5<0$.

Отсюда следует (см. (32)-(34)),

$$\mu_0=\frac{P_0}{0{,}5\tau+\theta_1^2\gamma_3^2}\,,\ P_0=\frac{1}{3}\theta_1^2\left(\gamma_3^2-2\gamma_1^2+\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_3\right),\ \tau=\frac{2}{3}\theta_1^2\left(0{,}5\gamma_3^2+0{,}5\gamma_1^2+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3\right)\le 0\,.$$

Параметры γ_1, γ_2, γ_3 определяются из решения оптимизационной задачи: максимизировать функцию

$$\mu_0=\frac{P_0}{0{,}5\tau+\theta_1^2\gamma_3^2}=\frac{-2\gamma_1^2+\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_3+\gamma_3^2}{0{,}5\gamma_1^2+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3+3{,}5\gamma_3^2}\to\sup$$

при условиях

$$-2\gamma_1^2+\gamma_2^2+2\gamma_1\gamma_3+\gamma_3^2>0\,,\ 0{,}5\gamma_1^2+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3+3{,}5\gamma_3^2\le 0\,.$$

Решением данной оптимизационной задачи являются:

$$\gamma_2=0\,,\ \gamma_3=1{,}5\gamma_1\,,\ \mu_0=\frac{3{,}25\gamma_1^2}{5{,}375\gamma_1^2}=0{,}604651162790697\,,\ P_0=3{,}25\gamma_1^2\,,\ \tau=-0{,}91666...\theta_1^2<0\,.$$

Таким образом, для данной задачи теорема 4 дает необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости, где $\overline{\mu}_0\approx\mu_0$, $\mu_0=0{,}604651162790697$, $\overline{\mu}_0=0{,}605551275464$.

Литература:

1. *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. – Алматы.: «Қазақ универститеті», 2001, 234 с.
2. *Айсагалиев С.А.* К теории регулируемых и фазовых систем// АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1987, №5, с.10-18.
3. *Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г.* Качественный метод исследования свойств решений одного класса нелинейных систем // Сборник трудов XXII международной научной конференции математические методы в технике и технологиях ММТТ-22, Псков, 2009, Том 1, с.24-29.

Рецензент: к.ф.-м.н. Белогоров А.П.