

Кудайкулов А.К., Кенжегулов Б.З., Амиртаев К.Б.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАВИСИМОСТИ УДЛИНЕНИЯ СТЕРЖНЯ НА ЕГО ДЛИНУ ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

УДК: 539.3

Бұл мақалада жылу ағыны, жылу алмасу және созылу күш әсерінен сырықтың ұзаруының оның ұзындығына тәуелділігі сандық зерттелген.

Жылу ағынының сырықтың ұзаруына әсері компьютер арқылы сандық түрде шешіліп кесте түрінде берілген.

In this article dependence of lengthening of a core at the expense of the given thermal stream, heat exchange with environment and stretching force for initial length of a core is investigated.

Dependence of lengthening of a core at the expense of a thermal stream, heat exchange with environment and stretching force has been resulted in drawings and on tables

Дан стержень ограниченной длины L , (см).

Площадь поперечного сечения F , (см²) постоянна по длине. Модуль упругости материала стержня E , (кг/см²), коэффициент теплопроводности материала стержня K_{xx} , (Вт/(см²·°C)), коэффициент теплового расширения α , (1/°C). Боковая поверхность стержня полностью теплоизолирована. Верхний конец стержня жестко зашпелен, а на нижнем конце приложена осевая растягивающая сила P , (кГ) (рисунок 1). На площадь поперечного сечения зашпеленного верхнего конца подведен тепловой поток q , (Вт/см²). А через площадь поперечного сечения нижнего конца, где приложена осевая растягивающая сила P , (кГ), происходит теплообмен с окружающей средой. Здесь температуру окружающей среды обозначим через T_{OC} (°C), коэффициент теплопроводности материала стержня через K_{xx} , (Вт/см²·°C), а коэффициент теплообмена с окружающей средой соответственно h , (Вт/см²·°C).

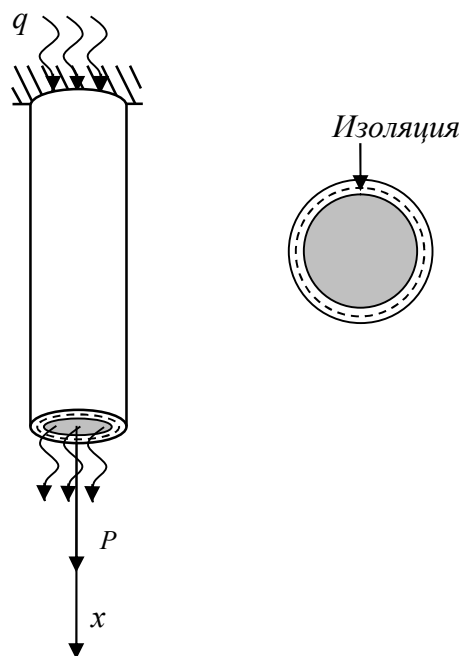


Рисунок 1 - Расчетная схема

Теперь исследуем зависимость удлинения стержня за счет данного теплового потока q , теплообмена с окружающей средой и растягивающей силы P на начальную длину стержня.

Обозначим площадь поперечного сечения через $S_1^{(1)}$, которая соответствует точке $x_i = 0$ первого элемента. На этой площади подведен тепловой поток q . Тогда для первого элемента вид функционала, выражающий полную тепловую энергию будет следующим

$$I_1 = \int_{V^{(1)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_1^{(1)}} q T dS,$$

$$0 \leq x \leq \frac{L}{n}, \quad (1)$$

где $V^{(1)}$ - объем первого конечного элемента, K_{xx} - коэффициент теплопроводности материала стержня. А также здесь учитывается, что боковая поверхность первого элемента теплоизолирована. Для остальных внутренних $(n-2)$ конечных элементов вид соответственного функционала будет следующим

$$I_i = \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV,$$

$$\frac{L}{n}(i-1) \leq x \leq \frac{L}{n}i, \quad i = 2 \div (n-1). \quad (2)$$

Через площадь поперечного сечения, которая соответствует точке $x = L$ самого последнего n -ого конечного элемента, происходит теплообмен с окружающей средой. Коэффициент теплообмена h , а температура окружающей среды T_{OC} , тогда для этого конечного элемента соответствующее выражение функционала имеет следующий вид

$$I_n = \int_{V^{(n)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{n+1}^{(n)}} \frac{h}{2} (T - T_{OC})^2 dS,$$

$$\frac{L}{n}(n-1) \leq x \leq L, \quad (4)$$

где $S_{n+1}^{(n)}$ -площадь поперечного сечения соответствующей точке $x = L$ стержня.

Тогда для всего стержня вид функционала, выражающий полную тепловую энергию будет следующим

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{V^{(i)}} \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_1^{(1)}} q T dS + \int_{S_{n+1}^{(n)}} \frac{h}{2} (T - T_{OC})^2 dS,$$

$$0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

Итак число конечных элементов стержня будет n , а число узловых точек будет равно $(2n+1)$. Поэтому минимизируя функционал (5) по значениям температуры $T_1, T_2, \dots, T_{(2n+1)}$ в узловых точках, построим следующую систему линейных алгебраических уравнений состоящих из $(2n+1)$ уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1 \div (2n+1). \quad (6)$$

Пусть значения параметров выражающих физико-механические свойства материала стержня будут следующими

$$K_{xx} = 72 \text{ (Вт/см}^\circ\text{C)}, \quad \alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ (1/}^\circ\text{C)},$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ (кГ/см}^2\text{)},$$

$$F = 20 \text{ (см}^2\text{)}, \quad P = 1000 \text{ (кГ)},$$

$$q = -150 \text{ (Вт/см}^2\text{)}, \quad h = 8 \text{ (Вт/см}^2\text{ }^\circ\text{C)},$$

$$T_{OC} = 20 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Значение длины стержня L будет разными

- 1) $L = 80 \text{ (см)},$
- 2) $L = 60 \text{ (см)},$
- 3) $L = 40 \text{ (см)},$
- 4) $L = 20 \text{ (см)}.$

Рассмотрим несколько примеров. Если длина стержня будет $L = 80 \text{ (см)}$, тогда в точке $x = 0$, где подведен тепловой поток, значение температуры будет $T(x=0) = T_1 = 205,4167 \text{ (}^\circ\text{C)}$. А также удлинение стержня засчет поля температуры будет $\Delta l_T = 0,12208 \text{ (см)}$, а удлинение засчет силы $P = 1000 \text{ (кГ)}$ будет $\Delta l_p = 0,000667 \text{ (см)}$. Тогда удлинение стержня в целом будет $\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_p = 0,12275 \text{ (см)}$ (таблица 1). А также объем стержня будет $V = FL = 20 \cdot 80 = 1600 \text{ (см}^3\text{)}$. Поле распределения температуры по длине стержня приведено на рисунке 2.

Таблица 1

Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при $L = 80 \text{ (см)}$

T1= 205,416667	T350= 169,0625000	T700= 132,6041667	T1050= 96,1458333	T1400= 59,6875000
T50= 200,3125000	T400= 163,8541667	T750= 127,3958333	T1100= 90,9375000	T1450= 54,4791667
T100= 195,1041667	T450= 158,6458333	T800= 122,1875000	T1150= 85,7291667	T1500= 49,2708333
T150= 189,8958333	T500= 153,4375000	T850= 116,9791667	T1200= 80,5208333	T1550= 44,0625000
T200= 184,6875000	T550= 148,2291667	T900= 111,7708333	T1250= 75,3125000	T1600= 38,8541667
T250= 179,4791667	T600= 143,0208333	T950= 106,5625000	T1300= 70,1041667	T1601= 38,7500000
T300= 174,2708333	T650= 137,8125000	T1000= 101,3541667	T1350= 64,8958333	

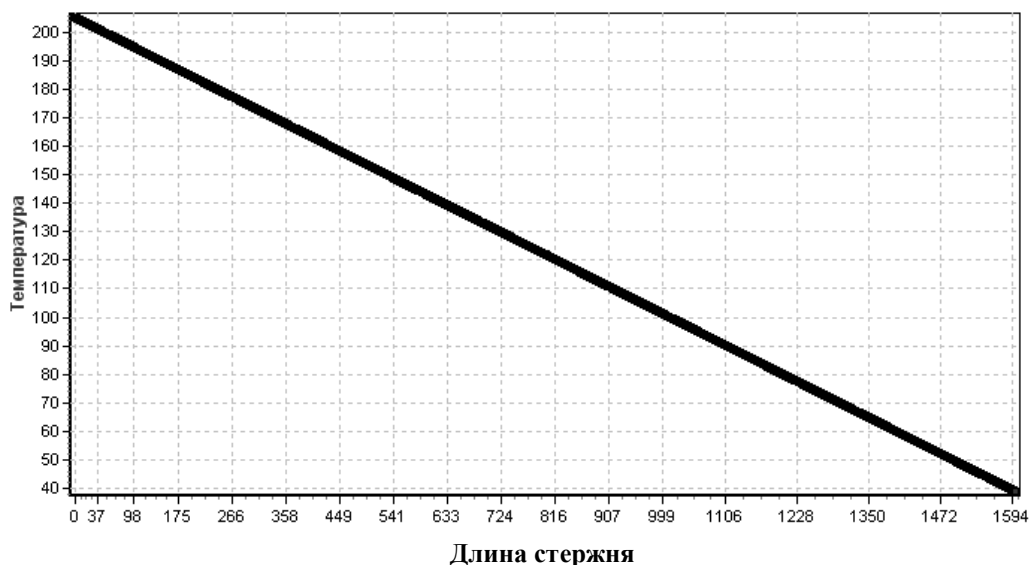


Рисунок 2 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при ($L = 80(см)$)

Во втором примере по сравнению с первым длина стержня короче на 25%, то есть $L = 60(см)$. Значение температуры будет $T(x = 0) = T_1 = 163,75(^{\circ}C)$. Здесь же удлинение стержня за счет поля температуры по сравнению с удлинением от растягивающей силы будет $\frac{\Delta l_T}{\Delta l_p} = 151,875$ раз больше. Это соотношение по сравнению с первым будет меньше на 17,065%. (таблица 2). В этом примере поле распределения температуры по длине стержня приведено на рисунке 3.

Таблица 2

Закон распределения поля температур в фиксированных точках стержня при $L = 60(см)$

T1= 163,7500000	T300= 132,6041667	T600= 101,3541667	T850= 75,3125000	T1100= 49,2708333
T50= 158,6458333	T350= 127,3958333	T650= 96,1458333	T900= 70,1041667	T1150= 44,0625000
T100= 153,4375000	T400= 122,1875000	T700= 90,9375000	T950= 64,8958333	T1200= 38,8541667
T150= 148,2291667	T450= 116,9791667	T750= 85,7291667	T1000= 59,6875000	T1201= 38,7500000
T200= 143,0208333	T500= 111,7708333	T800= 80,5208333	T1050= 54,4791667	
T250= 137,8125000	T550= 106,5625000			

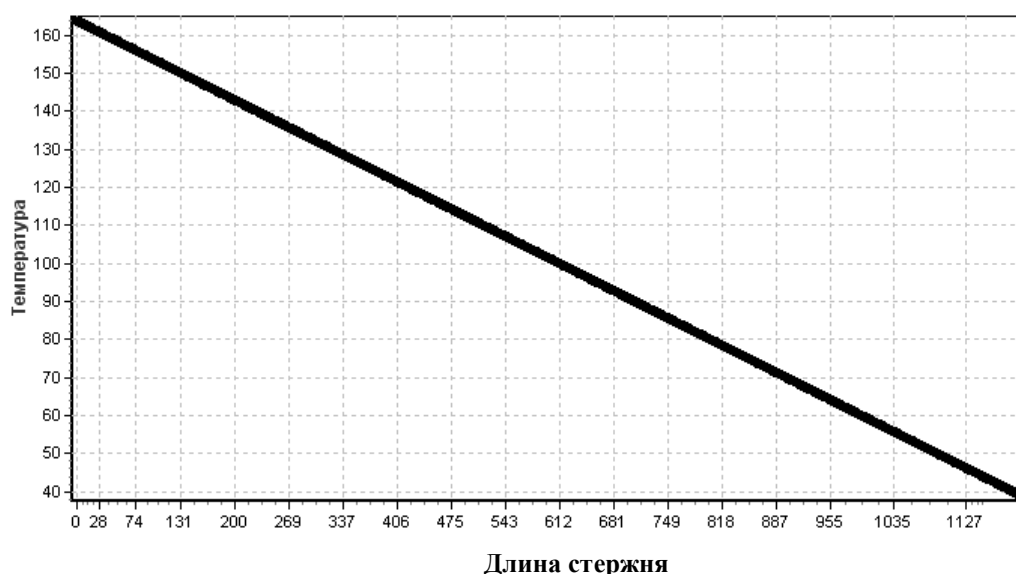


Рисунок 3 – Закон распределения поля температуры по длине стержня при ($L = 60(см)$)

Итак, после исследования для теплоизолированного по боковой поверхности стержня с ограниченной длины, можно построить ниже показанную заключительную таблицу (таблица 3). А также зависимость удлинения стержня от поле температуры на его длину приведено на рисунке 4. Удлинение стержня в целом засчет растягивающей силы и поле температуры показано на рисунке 5.

Таблица 3

Относительное удлинение стержня

Длина стержня L (см)	Δl_T (см)	Δl_P (см)	$\Delta l = \Delta l_T + \Delta l_P$ (см)	Δl_T на сколько раз меньше по сравнению, когда $L = 80$ см	Δl на сколько раз меньше по сравнению, когда $L = 80$ см
80	0,1220833333	0,0006666667	0,12275	1	1
60	0,0759375	0,0005	0,0764375	1,6077	1,6059
40	0,0402083333	0,0003333333	0,0405416667	3,0363	3,0277
20	0,0148958333	0,0001666667	0,0150625	8,1958	8,15

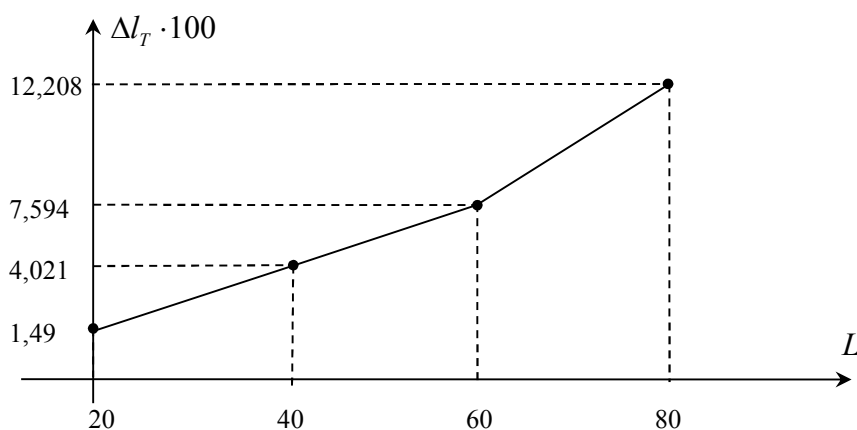


Рисунок 4 – Зависимость удлинения стержня на его длину засчет поля температуры

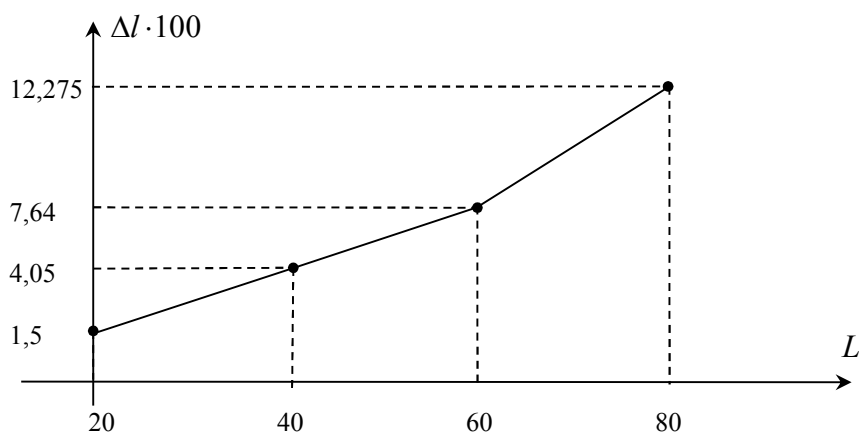


Рисунок 5 – Зависимость удлинения стержня на его длину засчет растягивающей силы и поля температуры

Литература:

1. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392с.
2. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. – Киев: Высшая школа, – 1973. – 672с.