Кожогельдинов С.Ш.

ОБ УРАВНЕНИИ $x^2 - xy + y^2 = z^2$

УДК: 511

Получена общая формула, описыающая все натуральные решения уравнения $x^2 - xy + y^2 = z^2$. Формулируется и доказывается теорема об эквивалентности общих формул всех натуральных решений этого уравнения.

1. Напомним [1 - 3], что диксоновым уравнением называется диофантово уравнение

$$x^2 - xy + y^2 = z^2, \tag{1}$$

где

$$x, y, z \in N. \tag{2}$$

Решение $\langle x, y; z\rangle$ диксонова уравнения (1) с условием (2) называется основным, если $(x, y, z) = 1$, т.е. если x, y, z взаимно простые числа. Например, решение $\langle 8,5;7\rangle$ диксонова уравнения (1) с условием (2) является основным, так как $(8,5,7) = 1$.

В работах [4 - 7] в той или иной мере речь идет об уравнении (1). Но там условие (2) заменено другим условием. В [4] имеется еще условие $x \le y$. Словом, в [4] рассматриваются две теоремы. Одна из них (Theorem 2) гласит:

«All integer solutions of $a^2 - ab + b^2 = c^2$ are given by either

$$\begin{aligned} a &= N(u^2 - 2uv) \\ b &= N(u^2 - v^2) \\ c &= N(u^2 - uv + v^2) \end{aligned} \tag{4}$$

or

$$\begin{aligned} a &= \frac{N}{3}(u^2 - 2uv) \\ b &= \frac{N}{3}(u^2 - v^2) \\ c &= \frac{N}{3}(u^2 - uv + v^2) \end{aligned} \tag{5}$$

where u, v and N are integers with $u \equiv -v (\mathrm{mod}\, 3)$ for Equations (5). In both coses *a, b, c* are positive and $a \le b$ if and only if $N > 0$ and $0 \le 2v < u$».

С помощью этих формул можно найти значительное число решений диксонова уравнения (1) с условием (2), но не все. В самом деле, формулы (4) и (5) (речь идет об обозначениях автора работы [4]) можно написать в виде следующей одной формулы

$$x = k\frac{u^2 - 2uv}{(3, u+v)}, \quad y = k\frac{u^2 - v^2}{(3, u+v)}, \quad z = k\frac{u^2 - uv + v^2}{(3, u+v)}, \tag{$*_1$}$$

где

$$k, u, v \in N, \quad u > 2v, \quad (u, v) = 1. \tag{$*_2$}$$

Формула ($*_1$) с условием ($*_2$), к сожалению, не дает всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2). И, следовательно, вопрос об отыскании общей формулы всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2) остается открытым. Уже это обуславливает актуальность настоящей работы. Поэтому вполне естественной является постановка и решение следующей задачи.

2. Постановка задачи. Пусть $\{\langle x, y; z \mid (1) \wedge (2) \rangle\}$ - множество всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало трех.

   Для решения поставленной задачи используются, без специального напоминания каждый раз, идеи, методы и результаты работ [2, 3, 8 - 11].

3. Имеют место следующие теоремы.

   Теорема 1. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{a^2 + 2ab}{(3, a+2b)}, \quad y = k\frac{2ab + b^2}{(3, a+2b)}, \quad z = k\frac{a^2 + ab + b^2}{(3, a+2b)}, \tag{3}$$

где

$$k, a, b \in N, \quad (a, b) = 1. \tag{4}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 1. Если $k = 9, \quad a = 1, \quad b = 2$, то условие (4) выполнено. Так как $(3, a+2b) = 1$, то формула (3) дает: $x = 45, \quad y = 72, \quad z = 63$.

Теорема 2. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{2cd + d^2}{(3, c+2d)}, \quad y = k\frac{c^2 + 2cd}{(3, c+2d)}, \quad z = k\frac{c^2 + cd + d^2}{(3, c+2d)}, \tag{5}$$

где

$$k, c, d \in N, \quad (c, d) = 1. \tag{6}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 2. Если $k = 9, \quad c = 2, \quad d = 1$, то условие (6) выполнено. Так как $(3, c+2d) = 1$, то формула (5) дает: $x = 45, \quad y = 72, \quad z = 63$.

Теорема 3. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{a^2 - b^2}{(3, a+b)}, \quad y = k\frac{2ab - b^2}{(3, a+b)}, \quad z = k\frac{a^2 - ab + b^2}{(3, a+b)}, \tag{7}$$

где

$$k, a, b \in N, \quad a > b, \quad (a, b) = 1. \tag{8}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 3. Если $k = 9, \quad a = 3, \quad b = 2$, то условие (8) выполнено. Так как $(3, a+b) = 1$, то формула (7) дает: $x = 45, \quad y = 72, \quad z = 63$.

Теорема 4. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{2cd - d^2}{(3, c+d)}, \quad y = k\frac{c^2 - d^2}{(3, c+d)}, \quad z = k\frac{c^2 - cd + d^2}{(3, c+d)}, \tag{9}$$

где

$$k, c, d \in N, \quad c > d, \quad (c, d) = 1. \tag{10}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 4. Если $k = 9$, $c = 3$, $d = 1$, то условие (10) выполнено. Так как $(3, c + d) = 1$, то формула (9) дает: $x = 45$, $y = 72$, $z = 63$.

Теорема 5. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{2ab - a^2}{(3, a + b)}, \quad y = k\frac{2ab - b^2}{(3, a + b)}, \quad z = k\frac{a^2 - ab + b^2}{(3, a + b)}, \tag{11}$$

где

$$k, a, b \in N, \quad a < 2b < 4a \quad \text{или} \quad b < 2a < 4b, \quad (a, b) = 1. \tag{12}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 5. Если $k = 9$, $a = 5$, $b = 4$, то условие (12) выполнено. Так как $(3, a + b) = 3$, то формула (11) дает: $x = 45$, $y = 72$, $z = 63$.

Теорема 6. Все решения диксонова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x = k\frac{2cd - d^2}{(3, c + d)}, \quad y = k\frac{2cd - c^2}{(3, c + d)}, \quad z = k\frac{c^2 - cd + d^2}{(3, c + d)}, \tag{13}$$

где

$$k, c, d \in N, \quad c < 2d < 4c \quad \text{или} \quad d < 2c < 4d, \quad (c, d) = 1. \tag{14}$$

Каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Пример 6. Если $k = 9$, $c = 4$, $d = 5$, то условие (14) выполнено. Так как $(3, c + d) = 3$, то формула (13) дает: $x = 45$, $y = 72$, $z = 63$.

Теорема 7. Если имеют место соответственно условия (4) – (14) (четные номера), то общие формулы (3) – (13) (нечетные номера) всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны.

Пример 7. Одно и то же решение $\langle 45, 72; 63 \rangle$ диксонова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (3) с условием (4) при $k = 9$, $a = 1$, $b = 2$; из формулы (5) с условием (6) при $k = 9$, $c = 2$, $d = 1$; из формулы (7) с условием (8) при $k = 9$, $a = 3$, $b = 2$; из формулы (9) с условием (10) при $k = 9$, $c = 3$, $d = 1$; из формулы (11) с условием (12) при $k = 9$, $a = 5$, $b = 4$ и из формулы (13) с условием (14) при $k = 9$, $c = 4$, $d = 5$.

4. И теперь становится совершенно очевидным какую роль в формулах, дающих все натуральные решения диксонова уравнения (1), играют арифметические функции, в частности, простейшие арифметические функции $(3, a + b)$, $(3, 2a + b)$ или, что то же самое, $(3, a + 2b)$, ибо $(3, a + 2b) = (3, 2a + b)$.
5. Доказательство теоремы 1. Из (1) с условием (2) следует, что

$$\frac{x - y}{z - y} = \frac{z + y}{x},$$

где $x, y, z \in N$, $z + y > x$. Положим, что

$$\frac{x - y}{z - y} = \frac{z + y}{x} = \frac{a + b}{a}, \tag{15}$$

где

$$a, b \in N, \quad (a, b) = 1. \tag{16}$$

Из (15) с условием (16) следует, что

$$x = \frac{a^2 + 2ab}{a^2 + ab + b^2} z, \quad y = \frac{2ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} z, \tag{17}$$

где

$$a, b \in N, \quad (a, b) = 1. \tag{18}$$

Положим, что

$$z = k \frac{a^2 + ab + b^2}{(3, a + 2b)}, \tag{19}$$

где

$$k, a, b \in N, \quad (a, b) = 1. \tag{20}$$

Из (17) с условием (18) и из (19) с условием (20) получается формула (3) с условием (4), которая является общей формулой всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения x, y, z из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют диксонову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $(x, y, z) = k$, где $k \in N$. И так как $(a, b) = 1$, то каждое такое решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Теорема 1 доказана. Доказательства теорем 2 – 6 аналогичны доказательству теоремы 1.

6. Доказательство теоремы 7. Схема доказательства эквивалентности формул (3) – (13) (нечетные номера) такова: $(3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (7) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (11) \Rightarrow (13) \Rightarrow (3)$.Здесь и в дальнейшем, когда речь будет идти об этих формулах, мы предполагаем, что условия (4) – (14) (четные номера) имеют место.

Покажем, что $(3) \Rightarrow (5)$. Пусть в формуле (3) $k = k, a = d, b = c$, где $k, c, d \in N, (c, d) = 1$. Тогда из формулы (3) получается формула (5). В самом деле, так как $(3, a + 2b) = (3, d + 2c) = (3, 2c + d) = (3, 2c + d - 3c - 3d) = (3, -c - 2d) = (3, c + 2d)$, $k = k, a^2 + 2ab = 2cd + d^2, 2ab + b^2 = c^2 + 2cd, a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$, то из формулы (3) следует формула (5).

Формула (7) следует из формулы (5) при $k = k, c = b, d = a - b$, где $k, a, b \in N, \quad a > b, \quad (a, b) = 1$. Здесь и в дальнейшем очевидные преобразования опускаем.

Формула (9) следует из формулы (7) при $k = k, a = c, b = c - d$, где $k, c, d \in N, \quad c > d, \quad (c, d) = 1$. Формула (11) следует из формулы (9) при $k = k$,

$$c = \frac{a + b}{(3, a + b)}, \quad d = \frac{2b - a}{(3, a + b)},$$

где $k, a, b \in N, \quad a < 2b < 4a \quad \text{или} \quad b < 2a < 4b, \quad (a, b) = 1$. Формула (13) следует из формулы (11) при $k, c, d \in N, \quad c < 2d < 4c \quad \text{или} \quad d < 2c < 4d, \quad (c, d) = 1$.Наконец, формула (3) следует из формулы (13) при $k = k$,

$$c = \frac{2a + b}{(3, a + 2b)}, \quad d = \frac{a + 2b}{(3, a + 2b)},$$

где $k, a, b \in N, \quad (a, b) = 1$.

Таким образом, при выполнении соответственно условий (4) – (14) (четные номера) общие формулы (3) – (13) (нечетные номера) всех решений диксонова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема 7 эквивалентности доказана.

7. Заметим, что число целых параметров, входящих в каждую из общих формул (3) – (13) (нечетные номера) соответственно с условием (4) – (14) (четные номера), не превышает трех.

Заметим еще, что справедливость теорем 2 – 6 следует из доказанных теорем 1 и 7.

8. Из теорем 1 – 7 очевидным образом вытекает

Следствие. Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x=\frac{a^2+2ab}{(3,a+2b)},\quad y=\frac{2ab+b^2}{(3,a+2b)},\quad z=\frac{a^2+ab+b^2}{(3,a+2b)},\tag{21}$$

где

$$a,b\in N,\quad (a,b)=1;\tag{22}$$

$$x=\frac{2cd+d^2}{(3,c+2d)},\quad y=\frac{c^2+2cd}{(3,c+2d)},\quad z=\frac{c^2+cd+d^2}{(3,c+2d)},\tag{23}$$

где

$$c,d\in N,\quad (c,d)=1;\tag{24}$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{(3,a+b)},\quad y=\frac{2ab-b^2}{(3,a+b)},\quad z=\frac{a^2-ab+b^2}{(3,a+b)},\tag{25}$$

где

$$a,b\in N,\quad a>b,\quad (a,b)=1;\tag{26}$$

$$x=\frac{2cd-d^2}{(3,c+d)},\quad y=\frac{c^2-d^2}{(3,c+d)},\quad z=\frac{c^2-cd+d^2}{(3,c+d)},\tag{27}$$

где

$$c,d\in N,\quad c>d,\quad (c,d)=1;\tag{28}$$

$$x=\frac{2ab-a^2}{(3,a+b)},\quad y=\frac{2ab-b^2}{(3,a+b)},\quad z=\frac{a^2-ab+b^2}{(3,a+b)},\tag{29}$$

где

$$a,b\in N,\quad a<2b<4a\quad \textit{или}\quad b<2a<4b,\quad (a,b)=1;\tag{30}$$

$$x=\frac{2cd-d^2}{(3,c+d)},\quad y=\frac{2cd-c^2}{(3,c+d)},\quad z=\frac{c^2-cd+d^2}{(3,c+d)},\tag{31}$$

где

$$c,d\in N,\quad c<2d<4c\quad \textit{или}\quad d<2c<4d,\quad (c,d)=1,\tag{32}$$

является общей формулой всех основных решений диксонова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое основное решение диксонова уравнения (1) с условием (2) определяется каждым из этих способов однозначно.

Пример 8. Одно и то же основное решение $\langle 5,8;7\rangle$ диксонова уравнения (1) с условием (2) получается: из формулы (21) с условием (22) при $a=1, b=2$; из формулы (23) с условием (24) при $c=2, d=1$; из формулы (25) с условием (26) при $a=3, b=2$; из формулы (27) с условием (28) при $c=3, d=1$; из формулы (29) с условием (30) при $a=5, b=4$ и из формулы (31) с условием (32) при $c=4, d=5$.

Литература:

1. Dickson LE. History of the Theory of Numbers. V.2.New York. 1966.
2. Кожегельдйнов OIL Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Том 3, - Алматы:, 2006. - 244 с.
3. Кожегельдйнов OIL Некоторые классические диофантовы уравнения от грех и. более переменных. Том 4. - Семей. 2008. 100 с.
4. Peter Heicheiheim. The General Solution Positive integers of the Equation a^2 - ab^2 + b^2 = c^2 /Recreational Mathematics. Vol.8(4), 1975 - 76. S. 249- 251.
5. E.McArcile, The "Cosine Rule", LRecreatinai Math., 3(2), pp. 122 -123. April 1970.
6. G.BersenyL Geometric Representations of the sequence /3,7J 3,21,31,43,57,...), J.Recreating Math., 7(3), pp. 203 -205, Summer 1974.
7. L.E.Dickson, Introduction of the Theory of Numbers, Dover Publications, lns,, New York (Reprint), pp. 44-49, 1957.
8. Кожегельдйнов СШУ/Изв. АН РК. Сер. физ.-маг. Алматы, 1992. *Ш*. С. 48-51.
9. Кожегельдйнов С.Ш./Межвуз. конф., посвящ. 70-летию проф. Т.И.Аманова. Тез. докл. Семипалатинск, 1993. С. 17- 19.
10. Кожегельдйнов СТШ/Мат. заметки. 1994. Т.55, №. С. 72 - 79.
11. Кожегельдйнов С..Ш.//И Междунар. конф. «Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел». Тез. докл. Воронеж. 1995. С. 85.