

Кудайкулов А.К., Кенжегулов Б.З., Мырзашева А.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ПОЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО ДЛИНЕ СТЕРЖНЯ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ, ТЕПЛООВОГО ПОТОКА, ТЕПЛООБМЕНА И ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ

УДК: 539.3

В работе на основе процедуры минимизации полной тепловой энергии по узловым значениям температуры разработана математическая модель установившегося поля распределения температуры по длине стержня, ограниченной длины при наличии локальной температуры, теплового потока, теплообмена и теплоизоляции. При этом материалом стержня является жаропрочный сплав АНВ-300, значением теплового расширения которого является функцией температуры. На основе разработанной модели также прилагается вычислительный алгоритм и метод, позволяющий численно исследовать установившееся поле распределения температуры, а также удлинение из жаропрочного сплава стержня с учетом наличия всех видов источников тепла и осевой растягивающей силы.

Жұмыста толық жылу энергиясын температураның түйінді нүктелері бойынша минималдау негізінде шекті ұзындықтағы локальды температурасы, жылу ағыны, жылу алмасуы және жылу изоляциясы бар стерженьнің ұзына бойына температура таралу өрісінің математикалық моделі жасақталған. Стержень материалы жылу таралу мәні температураның функциясы болатын қызуга төзімді АНВ-300 құймасы. Жасақталған модель негізінде қойылған температура таралу өрісін сандық тұрғыда зерттеуге болатындай, сонымен қатар барлық жылу көздерін және осьтік созылу күшін есепке алғандағы қызуга төзімді құймадан жасалған стерженьнің ұзаруын анықтауға болатындай әдіс және есептеу алгоритмі келтіріледі.

Рассмотрим вертикальный стержень ограниченной длины L [см]. Верхний конец которого жестко защемлен. На свободном нижнем конце приложена осевая растягивающая сила P [кГ]. Ось Ox направлена сверху вниз по оси стержня. Боковая поверхность участка $0 \leq x \leq x_1$ стержня теплоизолирована. На боковой поверхности участка $x_1 \leq x \leq x_2$ стержня

подведен тепловой поток с постоянной интенсивностью $q \left[\frac{Вт}{см^2} \right]$. Через боковую поверхность участка $x_2 \leq x \leq x_3 = L$ стержня происходит теплообмен с окружающей средой. При этом температура окружающей среды T_{oc} [°C], а коэффициент теплообмена между стержнем и этой средой $h \left[\frac{Вт}{см^2 \cdot °C} \right]$. Коэффициент теплопроводности материала стержня $K_{ст} \left[\frac{Вт}{см \cdot °C} \right]$. На верхнем защемленном конце стержня задана температура $T(x=0) = T_1$, на нижнем свободном конце стержня задана температура $T(x=L) = T_7$. Следует отметить, что материал стержня жаропрочный тугоплавки сплав АНВ-300 [1]. Характерной особенностью этого сплава является, то, что его коэффициент теплового расширения $\alpha \left[\frac{1}{°C} \right]$ является функцией температуры, т.е. $\alpha = \alpha(T(x))$. Расчетная схема рассматриваемой задачи приведена на рис.-1.

Для удобства первым элементом (участком) стержня берем участок $0 \leq x \leq x_1$, боковая поверхность

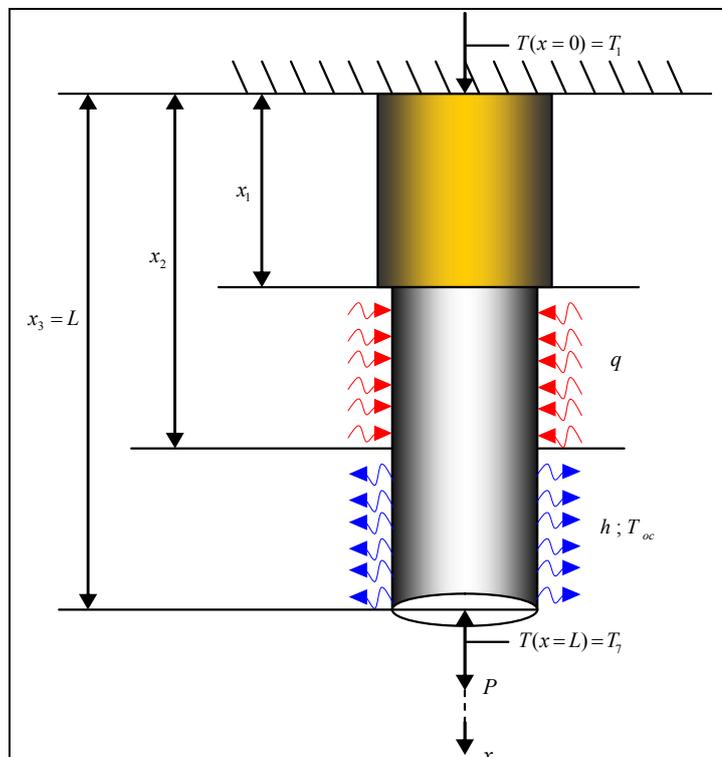


Рис. 1. Расчетная схема рассматриваемой задачи.

которого полностью теплоизолирована. На этом участке обозначим, что $T(x=0)=T_1$; $T(x=\frac{x_1}{2})=T_2$; $T(x=x_1)=T_3$. При этом по условию задачи T_1 считается заданной. Поле распределения температуры $T=T(x)$ в пределах первого элемента аппроксимируем полиномом второго порядка, т.е.

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \quad 0 \leq x \leq x_1. \quad (1)$$

Отсюда принятыми обозначениями получим, что в пределах первого элемента

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_1 + \varphi_j(x) \cdot T_2 + \varphi_k(x) \cdot T_3, \quad 0 \leq x \leq x_1. \quad (2)$$

где $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(x)$, $\varphi_k(x)$ являются следующими функциями координаты x .

$$\varphi_i(x) = \frac{\ell^2 - 3\ell x + 2x^2}{\ell^2}; \quad \varphi_j(x) = \frac{4(\ell x - x^2)}{\ell^2}; \quad \varphi_k(x) = \frac{2x^2 - \ell x}{\ell^2}, \quad (3)$$

где $\ell = \ell_1 = x_1$ - длина первого элемента.

Теперь переходим ко второму элементу (участку) стержня. В этом элементе примем, что $T(x=x_1)=T_3$; $T(x=\frac{x_2-x_1}{2})=T_4$; $T(x=x_2)=T_5$

Рассуждая как в случае первого элемента, по длине второго элемента поле распределения температуры имеет следующий вид

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_3 + \varphi_j(x) \cdot T_4 + \varphi_k(x) \cdot T_5, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (4)$$

здесь $\ell = \ell_2 = x_2 - x_1$ - длина второго элемента.

Аналогично, для последнего третьего элемента (участки) стержня примем, что $T(x=x_2)=T_5$;

$T(x=\frac{x_3-x_2}{2})=T_6$; $T(x=x_3=L)=T_7$. При этом по условию задачи T_7 считается заданной.

Тогда в пределах длины третьего элемента стержня поле распределения температуры имеет следующий вид

$$T(x) = \varphi_i(x) \cdot T_5 + \varphi_j(x) \cdot T_6 + \varphi_k(x) \cdot T_7, \quad x_2 \leq x \leq x_3 = L. \quad (5)$$

здесь $\ell = \ell_3 = x_3 - x_2$ - длина третьего элемента.

Теперь напишем выражение функционала, характеризующее полную тепловую энергию для рассматриваемого стержня с учетом наличия заданных температур, частичной теплоизоляции, локального теплового потока и теплообмена [2]

$$J = \int_V \frac{K_{xx}}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dV + \int_{S_{\text{теп}}} q T(x) dS + \int_{S_{\text{теп}}}^{(3)} \frac{h}{2} [T(x) - T_{oc}]^2 dS. \quad (6)$$

Интегрированный вид данного функционала имеет следующий вид [3]

$$\begin{aligned} J = & \frac{K_{xx} \cdot F_1}{2\ell_1} \left[\frac{7}{3} T_1^2 - \frac{16}{3} T_1 \cdot T_2 + \frac{2}{3} T_1 \cdot T_3 - \frac{16}{3} T_2 \cdot T_3 + \frac{16}{3} T_2^2 + \frac{7}{3} T_3^2 \right] + \\ & + \frac{K_{xx} \cdot F_2}{2\ell_2} \left[\frac{7}{3} T_3^2 - \frac{16}{3} T_3 \cdot T_4 + \frac{2}{3} T_3 \cdot T_5 - \frac{16}{3} T_4 \cdot T_5 + \frac{16}{3} T_4^2 + \frac{7}{3} T_5^2 \right] + \frac{\pi r_2 q \ell_2}{3} (T_3 + 4T_4 + T_5) + \\ & + \frac{K_{xx} \cdot F_3}{2\ell_3} \left[\frac{7}{3} T_5^2 - \frac{16}{3} T_5 \cdot T_6 + \frac{2}{3} T_5 \cdot T_7 - \frac{16}{3} T_6 \cdot T_7 + \frac{16}{3} T_6^2 + \frac{7}{3} T_7^2 \right] + \\ & + \pi r_3 h \left[\frac{2\ell_3}{15} T_5^2 - \frac{2\ell_3}{15} T_5 \cdot T_6 - \frac{\ell_3}{15} T_5 \cdot T_7 - \frac{16}{3} T_6 \cdot T_7 + \frac{8\ell_3}{15} T_6^2 + \frac{2\ell_3}{15} T_7^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\ell_3}{15} T_6 \cdot T_7 - \frac{\ell_3}{3} T_{oc} \cdot T_5 - \frac{4\ell_3}{3} T_{oc} \cdot T_6 - \frac{\ell_3}{3} T_{oc} \cdot T_7 + \ell_3 \cdot T_{oc}^2 \right], \quad (7) \end{aligned}$$

где F_1 , F_2 и F_3 - площади поперечных сечений элементов стержня, r_1 , r_2 и r_3 - радиусы поперечных сечений.

Минимизируя этот функционал по неизвестным узловым значениям температуры T_i , ($i = 2 \div 6$) получим следующую разрешающую систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned}
 1) \frac{\partial J}{\partial T_2} = 0; &\Rightarrow T_1 - 2T_2 + T_3 = 0; \\
 2) \frac{\partial J}{\partial T_3} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot F_1}{2\ell_1} \left[\frac{2}{3}T_1 - \frac{16}{3}T_2 + \frac{14}{3}T_3 \right] + \frac{K_{xx} \cdot F_2}{2\ell_2} \left[\frac{14}{3}T_3 - \frac{16}{3}T_4 + \frac{2}{3}T_5 \right] + \frac{\pi r_2 q \ell_2}{3} = 0; \\
 3) \frac{\partial J}{\partial T_4} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot F_2}{2\ell_2} \left[-\frac{16}{3}T_3 - \frac{16}{3}T_5 + \frac{32}{3}T_4 \right] + \frac{4\pi r_2 q \ell_2}{3} = 0; \\
 4) \frac{\partial J}{\partial T_5} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot F_2}{2\ell_2} \left[\frac{2}{3}T_3 - \frac{16}{3}T_4 + \frac{14}{3}T_5 \right] + \frac{K_{xx} \cdot F_3}{2\ell_3} \left[\frac{14}{3}T_5 - \frac{16}{3}T_6 + \frac{2}{3}T_7 \right] + \frac{\pi r_2 q \ell_2}{3} + \\
 &\quad + \pi r_3 h \left[\frac{4\ell_3}{15}T_5 + \frac{2\ell_3}{15}T_6 - \frac{\ell_3}{15}T_7 - \frac{\ell_3 \cdot T_{oc}}{3} \right] + \frac{\pi r_2 q \ell_3}{3} = 0; \\
 5) \frac{\partial J}{\partial T_6} = 0; &\Rightarrow \frac{K_{xx} \cdot F_3}{2\ell_3} \left[-\frac{16}{3}T_5 - \frac{16}{3}T_7 + \frac{32}{3}T_6 \right] + \pi r_3 h \left[\frac{2\ell_3}{15}T_5 + \frac{16\ell_3}{15}T_6 + \frac{2\ell_3}{15}T_7 - \frac{4T_{oc} \cdot \ell_3}{3} \right] = 0
 \end{aligned} \right\} (8)$$

Решая эту систему определяется значение T_i , ($i = 2 \div 6$). Далее с учетом заданных T_1 , T_7 и (3-5) определяют закон распределение поле температур по длине каждого элемента (участков) рассматриваемого стержня. Теперь необходимо определить поле распределения коэффициента теплового расширения, которое строго зависит от поля распределения температуры. Для этого обратимся к результатам проведенных натуральных экспериментов по определению этой закономерности по материалу АНВ-300 [1]. Результаты этих экспериментов можно задать следующей табличной форме.

Для жаропрочного тугоплавкого сплава АНВ – 300

T °C	20	100	200	300	400	500	600	700	800
$\alpha = \times 10^{-6} \frac{1}{\text{°C}}$	10,1	11,9	13,2	14,7	17	18,3	20,3	22	23,2

Здесь также следует отметить, что результаты проведенных экспериментов позволяют установить зависимость между коэффициентом теплового расширения и температуры в следующем виде

$$\left. \begin{aligned}
 1) 20^{\circ}\text{C} \leq T \leq 100^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,0225 \cdot 10^{-6} \cdot T + 9,65 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 2) 100^{\circ}\text{C} \leq T \leq 200^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 3) 200^{\circ}\text{C} \leq T \leq 300^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,015 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,2 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 4) 300^{\circ}\text{C} \leq T \leq 400^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,023 \cdot 10^{-6} \cdot T + 7,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 5) 400^{\circ}\text{C} \leq T \leq 500^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,013 \cdot 10^{-6} \cdot T + 11,8 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 6) 500^{\circ}\text{C} \leq T \leq 600^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,02 \cdot 10^{-6} \cdot T + 8,3 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 7) 600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 700^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,017 \cdot 10^{-6} \cdot T + 10,1 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right]; \\
 8) 700^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C} &\rightarrow \alpha = 0,012 \cdot 10^{-6} \cdot T + 13,6 \cdot 10^{-6} \left[\frac{1}{\text{°C}} \right];
 \end{aligned} \right\} (9)$$

Пользуясь вычисленными значениями T_i , а также системой (9) определяются узловые значения коэффициента теплового расширения α_i . Аналогично как поле температур, аппроксимируем поле распределения значения коэффициента теплового расширения в пределах длины каждого элемента кривой второго порядка. Тогда в пределах длины каждого элемента имеем, что

$$\alpha(T(x)) = \varphi_i(x) \cdot \alpha_n + \varphi_j(x) \cdot \alpha_{n+1} + \varphi_k(x) \cdot \alpha_{n+2}, \quad (10)$$

где для первого элемента $n=1$, второго $n=3$, а для третьего $n=5$.

Тогда величина удлинения каждого элемента вычисляется следующим образом [3]

$$\Delta \ell_{T_m} = \int_0^{\ell_m} [\varphi_i(x) \cdot \alpha_n + \varphi_j(x) \cdot \alpha_{n+1} + \varphi_k(x) \cdot \alpha_{n+2}] \cdot [\varphi_i(x) \cdot T_n + \varphi_j(x) \cdot T_{n+1} + \varphi_k(x) \cdot T_{n+2}] dx, \quad (11)$$

где $m = 1, 2, 3$ номер элемента; ℓ_m - длина элемента.

Величина удлинения стержня от воздействия приложенной на нижнем конце осевой растягивающей силы P определяется на основе закона Гука [4]

$$\Delta \ell_P = \frac{PL}{EF}. \quad (12)$$

За исходные данные примем следующие значения

$$r = 1 \text{ см}; h = 8 \frac{\text{Вм}}{\text{см}^2 \cdot ^\circ\text{C}}; K_{xx} = 100 \frac{\text{Вм}}{\text{см} \cdot ^\circ\text{C}}; q = -300 \frac{\text{Вм}}{\text{см}^2}; \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 10 \text{ см};$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = \pi \cdot r^2 = \pi \text{ см}^2; T_{oc} = 40^\circ\text{C}; T_1 = 800^\circ\text{C}; T_7 = 500^\circ\text{C}; P = 1000 \text{ кГ}.$$

При этих исходных данных из системы (8) находим, что

$$T_1 = 800^\circ\text{C}; \alpha_1 = 23,2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}; T_2 = 737,64^\circ\text{C}; \alpha_2 = 22,4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}};$$

$$T_3 = 675,28^\circ\text{C}; \alpha_3 = 21,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}; T_4 = 537,92^\circ\text{C}; \alpha_4 = 19,4 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}};$$

$$T_5 = 250,56^\circ\text{C}; \alpha_5 = 14 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}; T_6 = 117,37^\circ\text{C}; \alpha_6 = 12,2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}};$$

$$T_7 = 500^\circ\text{C}; \alpha_7 = 18,3 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

При этих вычисленных значениях, пользуясь соотношениям (11) находим удлинение каждого элемента (участка) стержня.

$$\Delta \ell_{T_1} = 0,165 \text{ см}; \Delta \ell_{T_2} = 0,09945 \text{ см}; \Delta \ell_{T_3} = 0,02928 \text{ см}.$$

Тогда общее удлинение стержня от теплового расширения будет

$$\Delta \ell_T = \sum_{i=1}^3 \Delta \ell_{T_i} = 0,294 \text{ см}.$$

Величина удлинения стержня от приложенной на нижнем свободном конце осевой растягивающей силы $P = 1000 \text{ кГ}$ определяется по (12)

$$\Delta \ell_P = 0,00478 \text{ см}.$$

Теперь находим соотношения $\frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_P}$.

$$N = \frac{\Delta \ell_T}{\Delta \ell_P} = 61,544 \text{ раза}.$$

Это показывает, что в рассматриваемой задаче величина удлинения стержня от теплового расширения на 61,544 раза больше чем величины удлинения от растягивающей силы P . Или же чтобы получить удлинение рассматриваемого стержня величиной $\Delta \ell = 0,294 \text{ см}$

при комнатной температуре необходимо ее растянуть силой, величина которого $P = 61544 \text{ кГ}$. Но эта сила весьма большая.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что для элементов конструкций, которые работают в сложном тепловом и силовом поле необходимо обязательно учитывать влияние тепловых источников. Ибо их влияние будет почти, на два порядка больше, чем действующие силы.

Литература:

1. Ф.Ф.Химушин. Жаропрочные стали и сплавы. 2-ое переработанное и дополненное издания. М.: Металлургия, 1969г.-749с.
2. Б.Кенжегулов, А.Мырзашева. Удлинение теплоизолированного стержня ограниченной длины, из жаропрочного сплава при наличии температуры, теплового потока, теплоизоляции и теплообмена. //Поиск – Изденіс. Серия естественных и технических наук. 2009. №2. С.229-232.
3. А.К.Кудайкулов, Б.З.Кенжегулов, А.Н.Мырзашева. Вычисление удлинение стержня ограниченной длины из жаропрочного тугоплавкого материала при наличии температуры, теплообмена, теплоизоляции и осевой растягивающей силы. Материалы III международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». г.Алматы: КазНТУ им. К.И.Сатпаева. 2009,Т.1. С.220 – 224.
4. С.П.Тимошенко, ДЖ.Н.Гудьер. Теория упругости. Из-во «Наука», М.: 1975г.-575с