Мальчик Ю.Н.

О ПОЛЮСАХ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Malchik Yu.N.

ABOUT POLES OF TRANSFER FUNCTION OF THE TIME-VARYING LINEAR SUSTEM

УДК: 62-50

Показано, что полюса точной передаточной функции нестационарной линейной системы являются комплексными числами, как и в случае стационарной системы, но не функциями времени.

The author shows, that poles of the exact Zadeh's function of the time-varying linear system are complex numbers, as well as in case of the stationary system, but not functions of time.

1. Введение

При исследовании нестационарных линейных систем (НЛС), уравнение вынужденных колебаний (УВК) которых имеет вид

$$[p^n + b_1(t)p^{n-1} + \cdots + b_n(t)]x(t) = y(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad t \in (-\infty, T), \tag{1.1}$$

где $T \le +\infty$; $y(t)$, $x(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; $b_1(t), \ldots, b_n(t)$ – вещественные аналитические функции аргумента t, часто возникает задача о вычислении передаточной функции $G(s,t)$ системы.

В общем случае передаточную функцию в аналитическом виде найти не удается. Поэтому на практике ищут ее аппроксимации. Согласно [1], наиболее удобна аппроксимация вида

$$\widetilde{G}(s,t) = \frac{E(s,t)}{D(s,t)}. \tag{1.2}$$

Здесь:

$$E(s,t) = e_0(t)s^{N-1} + \cdots + e_{N-1}(t)s + e_N(t);$$

$$D(s,t) = s^N + d_1(t)s^{N-1} + \cdots + d_N(t);$$

$e_0(t), \ldots, e_{N-1}(t)$; $d_1(t), \ldots, d_N(t)$ - вещественные непрерывные функции аргумента t; N – конечное целое положительное число.

В работах Ф.А.Михайлова [1, 2] показано, что в случае стационарной линейной системы аппроксимация вида (1.2) но с постоянными коэффициентами, соответствует точной передаточной функции системы.

Возникает вопрос: существует ли такая НЛС, для которой аппроксимация вида (1.2) является точной передаточной функцией, т.е. может ли иметь место равенство

$$\widetilde{G}(s,t) \equiv G(s,t)\,?$$

Целью настоящей работы является поиск ответа на поставленный вопрос.

2. Случай системы первого порядка

Рассмотрим НЛС первого порядка, УВК которой имеет вид

$$[p + b_1(t)]x(t) = y(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad t \in (-\infty, T), \tag{2.1}$$

где $b_1(t)$ – вещественная аналитическая функция аргумента t. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.1. Если УВК НЛС имеет вид (2.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области $-\infty < t < T$, $\mathrm{Re}\, s \ge c(t)$, не может быть представлена в виде

$$G(s,t) = \frac{e_1(t)}{s + d_1(t)}, \tag{2.2}$$

где $e_1(t)$ и $d_1(t)$ - вещественные непрерывные функции времени.

Доказательство. Допустим обратное, т.е. существует такая НЛС первого порядка, передаточная функция которой имеет вид (2.2).

Определим точную импульсную переходную функцию g(t,u) для НЛС с передаточной функцией (2.2). Согласно [1] имеем

$$g(t,t-\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c-i\infty}G(s,t)\exp(\tau s)ds, \tag{2.3}$$

где $i=\sqrt{-1}$; τ = t – u; c – положительное число, выбранное с таким расчетом, чтобы интеграл (2.3) сходился при всех Re s ≥ c. Подынтегральное выражение в формуле (2.3) удовлетворяет условиям леммы Жордана [3], поэтому имеем

$$g(t,t-\tau)=\operatorname{Re}s\left[\frac{e_1(t)\exp(\tau s)}{s-s_1(t)}\right]_{s=s_1(t)},$$

где $s_1(t)$ – полюс функции G(s.t)exp(τ.s). Отсюда имеем

$$g(t,t-\tau)=e_1(t)\exp[s_1(t)\tau],\quad 0<\tau<\infty, \tag{2.4}$$

где $s_1(t) = - d_1(t)$.

Выполнив замену u = t - τ, формулу (2.4) запишем в виде

$$g(t,u)=e_1(t)\exp[s_1(t)t-s_1(t)u]. \tag{2.5}$$

С другой стороны, согласно [1] имеем

$$g(t,u)=\exp\int_u^t\zeta_1(v)dv, \tag{2.6}$$

где $\zeta_1(t) = - d_1(t)$.

Сравнив правые части выражений (2.6), (2.5) и положив

$$\zeta_1(v)=\frac{dZ}{dv}, \tag{2.7}$$

получим

$$\frac{\exp Z(t)}{\exp Z(u)}=\frac{e_1(t)\exp[s_1(t)t]}{\exp[s_1(t)u]}. \tag{2.8}$$

Совершенно очевидно, что (2.8) неверно, поскольку

$$\frac{1}{\exp Z(u)}\neq\frac{1}{\exp[s_1(t)u]}$$

так как

$$F(u)\neq F(t,u)\quad\forall(t\neq u).$$

Полученное противоречие (2.8) доказывает утверждение 1.1.

Утверждение 1.2. Если УВК НЛС имеет вид (2.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области -∞ < t < T, Re s ≥ c(t), не может быть представлена в виде (1.2).

Доказательство. Допустим обратное, т.е. существует такая НЛС первого порядка, точная передаточная функция которой имеет вид (1.2). Импульсная переходная функция g(t,u) для НЛС с передаточной функцией (1.2) может быть найдена по формуле (2.3). Подынтегральное выражение в формуле (2.3) имеет один полюс $s_1(t)$ кратности N (в передаточной функции для НЛС первого порядка должна быть только одна особая точка). Тогда импульсная переходная функция g(t,u) может быть найдена по формуле

$$g(t,t-\tau)=\operatorname{Re}s\left[\frac{E(s,t)\exp(\tau s)}{(s-s_1(t))^N}\right]_{s=s_1(t)}.$$

Отсюда

$$g(t,t-\tau)=\frac{1}{(N-1)!}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N-1}{j}E^{(j)}(s_1(t),t),t)\tau^{N-1-j}\right]\exp[\tau s_1(t)], \qquad (2.9)$$

где

$$E^{(j)}(s,t)=\frac{\partial^j E(s,t)}{\partial s^j}\Big|_{s=s_1(t)}.$$

Выполнив замену u = t - τ, формулу (2.9) запишем в виде

$$g(t,t-\tau)=\frac{1}{(N-1)!}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N-1}{j}E^{(j)}(s_1(t),t)(t-u)^{N-1-j}\right]\exp[s_1(t)t-s_1(t)u]. \qquad (2.10)$$

Сравнив правые части выражений (2.6), (2.10), с учетом (2.7) получим

$$\frac{\exp Z(t)}{\exp Z(u)}=\sum_{j=0}^{N-1}l_j(t)(t-u)^{N-1-j}\,\frac{\exp[s_1(t)t]}{\exp[s_1(t)u]}, \qquad 2.11)$$

где

$$l_j(t)=\frac{1}{(N-1)!}\binom{N-1}{j}E^{(j)}(s_1(t),t), \quad j=1,\ldots,N-1.$$

Однако равенство (2.11) неверно, поскольку очевидно что

$$\frac{1}{\exp Z(u)}\neq\sum_{j=0}^{N-1}\frac{(t-u)^{N-1-j}}{\exp[s_1(t)u]},$$

так как

$$F(u)\neq\Phi(t,u) \quad \forall(t\neq u).$$

Полученное противоречие (2.11) доказывает утверждение 1.2.

Утверждение 1.3. Если УВК НЛС имеет вид (2.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области $-\infty < t < T$, $\mathrm{Re}\, s \geq c(t)$, может быть представлена в виде

$$G(s,t)=\frac{E(s,t)}{s^N+d_1 s^{N-1}+\cdots+d_N}, \qquad (2.12)$$

где $e_0(t), \ldots, e_{N-1}(t)$; - вещественные непрерывные функции аргумента t; $d_1, \ldots, d_N$ – вещественные числа; N – конечное целое положительное число.

Доказательство. Рассмотрим систему, УВК которой имеет вид

$$\left[p+\frac{2}{t+2}\right]x(t)=y(t). \qquad (2.13)$$

Согласно [1] импульсная переходная функция такой системы имеет вид

$$g(t,u)=\frac{(u+2)^2}{(t+2)^2}. \qquad (2.14)$$

Передаточная функция системы может быть найдена по формуле [4]

$$G(s,t)=\int_{0-}^{\infty}g(t,t-\tau)\exp(-s\tau)d\tau \qquad (2.15)$$

и представлена в виде

$$G(s,t)=\frac{s^2-\dfrac{2s}{t+2}+\dfrac{2}{(t+2)^2}}{s^3}. \qquad (2.16)$$

Из сравнения (2.26) и (2.12) следует, что передаточная функция системы первого порядка может быть представлена в виде (2.12).

Утверждение 1.3 доказано.

Изложенную методику доказательства утверждений типа 1.1- 1.3 можно распространить и для систем порядка n > 1. Рассмотрим в частности систему второго порядка

3. Случай системы второго порядка

Рассмотрим НЛС второго порядка, УВК которой имеет вид

$$[p^2 + b_1(t)p^1 + b_2(t)]x(t) = y(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad t \in (-\infty, T), \tag{3.1}$$

где $T \le +\infty$; $y(t)$, $x(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы; $b_1(t)$, $b_2(t)$ – вещественные аналитические функции аргумента t. Пусть $\zeta_1(t)$ и $\zeta_2(t)$ – корни обобщенного характеристического уравнения (ОХУ)

$$(\zeta + p)\zeta + b_1(t)\zeta + b_1(t) = 0, \quad p \equiv \frac{d}{dt}. \tag{3.2}$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Если УВК НЛС имеет вид (3.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области $-\infty < t < T$, $\operatorname{Re} s \ge c(t)$, не может быть представлена в виде

$$G(s,t) = \frac{e_0(t)s + e_1(t)}{s^2 + d_1(t)s + d_1(t)}, \tag{3.3}$$

где $e_0(t)$, $e_1(t)$; $d_1(t)$, $d_2(t)$ - вещественные непрерывные функции времени.

Доказательство. Допустим обратное, т.е. существует такая НЛС второго порядка, передаточная функция которой имеет вид (3.3).

Определим по формуле (2.3) точную импульсную переходную функцию g(t,u) для НЛС с передаточной функцией (3.3). Подынтегральное выражение в формуле (2.3) удовлетворяет лемме Жордана, поэтому в случае простых полюсов имеем

$$g(t, t-\tau) = \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Re} s\left[\frac{e_0(t)s + e_1(t)}{(s-s_1)(s-s_2)}\exp(\tau s)\right]_{s=s_j},$$

где $s_j(t)$ – полюса функции $G(s.t)\exp(\tau.s)$. Отсюда имеем

$$g(t, t-\tau) = \sum_{j=1}^{2} k_j(t)\exp[s_j(t)\tau], \quad 0<\tau<\infty, \tag{3.4}$$

где

$$k_j(t) = (-1)^{j-1}\frac{e_0(t)s_j(t) + e_1(t)}{s_1 - s_2}.$$

Выполнив замену $u = t - \tau$, формулу (3.4) запишем в виде

$$g(t,u) = \sum_{j=1}^{2} k_j(t)\exp[s_j(t)t - s_j(t)u]. \tag{3.5}$$

с другой стороны, согласно [1], имеем

$$g(t,u) = \sum_{j=1}^{2} D_j(u)\exp\int_u^t \zeta_j(v)dv, \tag{3.6}$$

где

$$D_j(u) = \frac{(-1)^{j-1}}{\zeta_1(u) - \zeta_2(u)}.$$

Сравнив правые части выражений (3.6), (3.5) и положив

$$\zeta_j(v) = \frac{dZ_j}{dv}, \quad j = 1, 2, \tag{3.7}$$

получим

$$\sum_{j=1}^{2} D_j(u)\frac{\exp Z(t)}{\exp Z(u)} = \sum k_j(t)\frac{\exp[s_j(t)t]}{\exp[s_j(t)u]}. \tag{3.8}$$

Совершенно очевидно, что (3.8) неверно, поскольку

$$\frac{D_j(u)}{\exp Z_j(u)} \neq \frac{1}{\exp[s_j(t)u]}, \quad j = 1, 2.$$

так как

$$F(u) \neq F(t,u) \quad \forall (t \neq u).$$

Полученное противоречие (3.8) доказывает утверждение 2.1 для случаев простых полюсов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Для случая $s_1(t) = s_2(t)$ доказательство аналогично рассмотренному случаю. $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Утверждение 2.2. Если УВК НЛС имеет вид (3.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области $-\infty < t < T$, $\mathrm{Re}\, s \geq c(t)$, не может быть представлена в виде (1.2).

Доказательство. Допустим обратное, т.е. существует такая НЛС второго порядка, точная передаточная функция, которой имеет вид (1.2). Импульсная переходная функция g(t,u) для НЛС с передаточной функцией (1.2) может быть найдена по формуле (2.3).

Пусть подынтегральное выражение в формуле (2.3) имеет всего один полюс кратности N. Тогда, как и в случае НЛС первого порядка, импульсная переходная функция g(t,u) может быть приведена к виду (2.10).

Сравнив правые части выражений (3.6) и (2.10), с учетом (3.7) получим

$$\sum_{\nu=1}^{2} D_\nu(u)\frac{\exp Z_\nu(t)}{\exp Z_\nu(u)} = \sum_{j=0}^{N-1} l_j(t)(t-u)^{N-1-j}\frac{\exp[s_1(t)t]}{\exp[s_1(t)u]}. \tag{3.12}$$

Однако равенство (3.12) неверно, поскольку очевидно что

$$\sum_{\nu=1}^{2}\frac{D_\nu(u)}{\exp Z_\nu(u)} \neq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(t-u)^{N-1-j}}{\exp[s_1(t)u]},$$

так как

$$F(u) \neq \Phi(t,u) \quad \forall (t \neq u).$$

Полученное противоречие (3.12) доказывает утверждение 2.2 для случая единственного полюса кратности N.

Пусть N = 2m и подынтегральное выражение в (2.3) имеет 2 полюса $s_1(t)$ и $s_2(t)$, причем каждый из них кратности m. Для простоты рассуждений положим N = 4. Тогда

$$g(t,t-\tau) = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}s\left[\frac{E(s,t)}{(s-s_1)^2(s-s_2)^2}\exp(\tau s)\right]_{s=s_j(t)}.$$

Отсюда

$$g(t,t-\tau) = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial G_j(s,t)}{\partial s} + G_j\big(s_j(t),t\big)\tau\right]_{s=s_j(t)} \cdot \exp\big[s_j(t),t)\tau\big], \tag{3.13}$$

где

$$G_j\big(s_j(t),t\big) = \lim_{s\to s_j(t)}\big(s-s_j\big)^2\frac{E(s,t)}{\big(s-s_1(t)\big)^2\big(s-s_2(t)\big)^2}.$$

Выполнив замену u = t - τ, формулу (3.13) запишем в виде

$$g(t,u) = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial G_j(s,t)}{\partial s} + G_j\big(s_j(t),t\big)\cdot\big(t-u\big)\right]_{s=s_j(t)} \cdot \exp\big[s_j(t),t)\cdot\big(t-u\big)\big]. \tag{3.14}$$

Сравнив правые части выражений (3.6) и (3.14), с учетом (3.7) получим

$$\sum_{\nu=1}^{2} D_\nu(u)\frac{\exp Z_\nu(t)}{\exp Z_\nu(u)} = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial G_j(s,t)}{\partial s} + G_j\big(s_j(t),t\big)\cdot\big(t-u\big)\right]_{s=s_j(t)} \cdot \frac{\exp\big[s_j(t),t)\cdot\big(t\big)\big]}{\exp\big[s_j(t),t)\cdot\big(u\big)\big]}. \tag{3.15}$$

Однако равенство (3.15) неверно, поскольку

$$F(t) \neq F(t,u), \quad \Phi(u) \neq \Phi(t,u) \quad \forall (t \neq u).$$

Полученное противоречие (3.15) доказывает утверждение 2.2 для случая, когда N = 2m и подынтегральная функция в (2.3) имеет 2 полюса причем каждый из них кратности m.

Число особых точек передаточной функции НЛС равно числу корней ОХУ, соответствующего УСК НЛС. Это утверждение следует из способа расчета импульсной переходной функции g(t,u) и последующего отыскания передаточной функции G(s,t) системы, предложенного Ф.А.Михайло-вым в [1] следовательно, число полюсов системы второго порядка $j \le 2$. Поэтому рассмотренных случаев достаточно, для того чтобы считать, что утверждение 2.2 доказано полностью.

Утверждение 2.3. Если УВК НЛС имеет вид (2.1), то ее точная передаточная функция G(s,t), аналитическая в области $-\infty < t < T$, Re $s \ge c(t)$, может быть представлена в виде (2.12).

Доказательство. Рассмотрим систему УВК, которой имеет вид

$$\left[p^2 + \frac{2p}{t+a} - b^2 \right] x(t) = y(t), \qquad (3.16)$$

где $a > 0$, $b > 0$ – вещественные числа.

Корни ОХУ

$$(\zeta + p)\zeta + \frac{2\zeta}{t+a} - b^2 = 0,$$

равны

$$\zeta_j = \frac{-1}{t+a} + (-1)^{j-1} b, \quad j = 1,2.$$

Отсюда по формулам (3.6) и (2.16) найдем

$$G(s,t) = \frac{s^2 + \dfrac{2s}{t+a} - b^2}{(s-b)^2 (s+b)^2}.$$

Таким образом, рассматриваемой НЛС соответствует передаточная функция типа (2.12), где

$$E(s,t) = s^2 - \frac{2s}{t+a} - b^2;$$

$$D(s) = (s-b)^2 (s+b)^2.$$

Утверждение 2.3 доказано.

4. Заключение

Точная передаточная функция нестационарной линейной системы не может быть представлена дробно-рациональной функцией комплексной переменной s и вещественной переменной t с зависящими от времени коэффициентами знаменателя, аналитической в области $(-\infty, T)$, Res $\ge c(t)$.

Полюса передаточной функции нестационарной линейной системы являются комплексными числами.

Литература:

1. Михайлов Ф.А. Анализ и синтез нестационарных линейных систем.- М.: Машиностроение, 1977.- 296 с.
2. Михайлов Ф.А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем.- М.: Наука, 1986.- 320 с.
3. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров.-М.: Наука, 1967.- 780 с.
4. Blanc Ch. Sur les equation differentials lineaires a coeffitients lentement variable. - Bull. Technique de la Suisse remande, 1948. v.74, №15, p. 182-189.

Рецензент: д.тех.н., профессор Асанов А.