Калдыбаева Г.А.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

G.A. Kaldybaeva

THE FINITE DIFFERENCED SOLVE OF ONE DIMENSIONAL INVERSE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

УДК: 517. 962.2, 519. 876.2

В данной статье рассмотрено конечно-разностное решение одномерной задачи термоупругости, которое сходится к точному решению поставленной задачи. Сходимость приближенного решение к точному доказана по методике доказательств обратной задачи.

In this article the finite-difference solution of one-dimensional problem of thermoelasticity, which converges to the exact solution of the problem. Convergence of approximate solution to exact proof of evidence on how the inverse problem

1. Постановка задачи.

Несвязанная динамическая задача термоупругости описывается системой дифференциальных уравнений [1]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \theta, \tag{2}$$

где $\theta(x,t)$ - приращение температуры, $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ - вектор смещений, σ_{ij} - напряжения:

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left[\lambda\, div u - (3\lambda + 2\mu) \int_0^{\theta(x,t)} \alpha(y) dy \right], \tag{3}$$

а параметры входящие здесь имеют следующий физический смысл: κ - коэффициент температуропроводности, ρ - плотности среды, λ, μ - параметры Ламэ, α - коэффициент теплового расширения, δ_{ij} - символ Кронекера.

Относительно этих параметров предположим, что выполнено следующие условия:

$$\begin{aligned} \Delta_0 = \{ &\rho = \rho(x_3) > 0, \mu = \mu(x_3) > 0, \lambda = \lambda(x_3) > 0, \\ &b(x_3) = \{\rho(x_3), \mu(x_3), \lambda(x_3)\}, \\ &b(x_3) \in C^6(R_+), b(+0) = 0, \ 0 < M_1 \le b(x_3) \le M_2, \ \|b(x_3)\| \le M_3 \}, \end{aligned} \tag{4}$$

(1), (2) рассмотрим со следующими начальными и граничными условиями

$$u_i \Big|_{t=+0} = 0, \qquad \partial u_i / \partial t \Big|_{t=+0} = 0, \tag{5}$$

$$\theta(x,t)\big|_{t=+0}=0, \tag{6}$$

$$\sigma_{3i}\big|_{x_3=+0}=f(x_1,x_2,t), \tag{7}$$

$$(\partial\theta/\partial x_3-\gamma\theta)\big|_{x_3=+0}=\varphi(x_1,x_2,t), \tag{8}$$

Пусть $f_i(x_1,x_2,t)=0$, а

$$\varphi(x_1,x_2,t)=-\gamma(T_1-T_0) \tag{9}$$

Решение (2),(6),(8),(9) имеет вид [1]:

$$\theta(z,t)=(T_1-T_0)\left[erfc\left(\frac{z}{(2\sqrt{kt})}\right)-\exp(\gamma z+\gamma^2 kt)*erfc\left(\frac{z}{(2\sqrt{kt})}+\gamma\sqrt{kt}\right)\right], \tag{10}$$

где $erfc=1-erf(z)$, $\quad erf(z)=\left(\frac{2}{\pi}\right)*\int\limits_0^z\exp(-\xi^2)d\xi,\quad z=x_3$, (11)

Тогда получим задачу (см. [1]):

$$\rho(z)\frac{\partial^2 u_3}{dt^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda(z)-2\mu(z))\frac{\partial u_3}{\partial z}-(3\lambda(z)+2\mu(z))R(\theta(z,t))\right] \tag{12}$$

$$u_3\big|_{t=+0}=0,\qquad \frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=+0}=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big|_{z=+0}=\frac{(3\lambda(0)+2\mu(0))}{(\lambda(0)+2\mu(0))}R(\theta(0,t)) \tag{14}$$

$$u_1=u_2=0,\quad u_3=u_3(z,t,)\qquad z=x_3,\quad R(S)=\int\limits_o^s\alpha(y)dy, \tag{15}$$

Функция $\theta(z,t)$ - известная, определенная равенством (10).

Обратная задача. Определить функцию $\alpha(y)$ из (12)-(14), если относительно решения $u_3(z,t)$ известно, что

$$u_3(0,t)=g(t),\quad t\in[0,T], \tag{16}$$

$$\Delta_1=\{g(t):g(+0)=0,g(t)\in C^2[0,T],g'(+0)=0\}, \tag{17}$$

Введем новую переменную $x(z)=\int\limits_{o}^{z}\sqrt{\dfrac{\lambda(\xi)+2\mu(\xi)}{\rho(\xi)}}\,d\xi$

и новые функции $V(x,t)=\dfrac{\partial u_3(z,t)}{\partial t}\cdot S^{-1}(x),\ \ S(x)=\sqrt{\dfrac{c(x)}{c(o)}}$,

$$c(x)=\frac{1}{\sqrt{[\lambda(x(z))+2\mu(x(z))]\rho(x(z))}}\qquad q(x)=\frac{S''(x)}{S(x)}-2\left[\frac{S'(x)}{S(x)}\right]^2.$$

Тогда из (12)-(16) получим задачу

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+q(x)V(x,t)-\sqrt{c(x)c(0)}\frac{\partial}{\partial x}\left[(3\lambda(x)+2\mu(x))\alpha(\theta(x,t))\theta_t(x,t)\right],$$

$$V(x,t)\big|_{t=+0}=0,\quad V_t(x,t)\big|_{t=+0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{c'(0)f(t)}{2c(0)}+\left[3\lambda(0)+2\mu(0)\right]c(0)\alpha(\theta(0,t))\theta_t'(0,t),$$

$$V(0,t)=f(t),t\in[0,T]\ \ ,\quad f(t)=g'(t).$$

Если ввести обозначения $\phi(x,t)=\alpha(\theta(x,t)),\ Z(x,t)=(3\lambda(x)+2\mu(x))*\theta_t'(x,t)$,

то из последних получим

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+q(x)V(x,t)-\sqrt{c(x)c(0)}\left[Z_x'(x,t)\phi(x,t)+Z(x,t)\phi_x'(x,t)\right],\tag{18}$$

$$V(x,t)\big|_{t=+0}=0,\quad V_t'(x,t)\big|_{t=+0}=0,\tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{c'(0)f(t)}{2c(0)}+Z(0,t)c(0)\phi(0,t),\tag{20}$$

$$V(0,t)=f(t),\qquad t\in[0,T].\tag{21}$$

Здесь обратная задача заключается в определении функции $\phi(x,t)$ из (18) – (21).

Пусть для нее выполнено следующее условие

$$\phi(x,t)\in C^2(R_+\times R),\quad \phi(x,t)\ge M>0,\ \phi(x,t)\in\Lambda_0 \tag{*}$$

где $\Lambda_0=\left\{\phi(x,t)\in C^6(R_+XR_+),\phi'(+0,t)=0,\ 0<M_1\le\phi(x,t)\le M_2,\|\phi\|_{C^2}\le M_3\right\}$

2. Конечно-разностное решение.

Для численного решения задачи введем сеточную область

$$\Delta_h(T)=\left\{x_i=ih, h=\frac{T}{2N}, i=\overline{0,N};\ \ t_k=kh, k=\overline{0,2N};\ \ ih\le kh\le T-ih\right\}.$$

Напишем разностную задачу для (18)-(21)

$$V_{x\bar{x}}=V_{t\bar{t}}+q_iV_i^k-\sqrt{C_iC_o}\left[Z_{\bar{x}}^k\phi_i^k+Z_i^k\phi_{\bar{x}}^k\right], \tag{22}$$

$$V_0^k=f^k,\quad k=\overline{1,N}; \tag{23}$$

$$V_1^k=f^k+\left[\frac{(C_1-C_0)f^k}{2hC_0}+C_0Z_0^k\phi_0^k\right]h,\quad k=\overline{0,2N}; \tag{24}$$

$$V_i^0=0\quad i=\overline{0,N};\quad V_i^1=0,\quad i=\overline{0,N}, \tag{25}$$

Распишем разностное уравнение (22)

$$V_{i+1}^k=V_i^{k+1}-V_i^{k-1}+V_{i-1}^k+h^2q_iV_i^k-h^2\sqrt{C_iC_0}*\left[\left(\frac{Z_i^k-Z_{i-1}^k}{h}\right)\phi_i^k+Z_i^k\left(\frac{\phi_i^k-\phi_{i-1}^k}{h}\right)\right], \tag{26}$$

Подставляя в правую часть последнего уравнения выражения $V_i^{k+1},V_i^{k-1},V_i^{k-2},V_i^{k-3},V_i^{k-4}\ldots$ последовательно получим:

$$V_{i+1}^k=\left[f^{k+i+1}+f^{k-i-1}\right]/2+h^2\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}q_\mu\cdot V_\mu^{k-i-\mu+2p}-h^2\sqrt{C_o}\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\sqrt{C_\mu}\,*$$
$$*\left[\left(\frac{Z_\mu^{k-i-\mu+2p}-Z_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p}}{h}\right)\cdot\phi_\mu^{k-i-\mu+2p}+Z_\mu^{k-i-\mu+2p}\cdot\left(\frac{\phi_\mu^{k-i-\mu+2p}-\phi_{\mu-1}^{k-i-\mu+2p}}{h}\right)\right]. \tag{27}$$

Приравнивая в (27) $i=0$ и используя (24) получим

$$\left(f^{k+1}+f^{k-1}\right)/2=f^k+\frac{(C_1-C_0)f^k}{2C_0}+C_0Z_0^k\phi_0^k\cdot h$$

Отсюда

$$\phi_0^k=\frac{f^{k+1}-2f^k+f^{k-1}}{2h}*\frac{1}{C_0Z_0^k}\frac{(C_1-C_0)f^k}{2hC_0^2Z_0^k}=\left[\left(f^{k+1}-2f^k+f^{k-1}\right)\frac{(C_1-C_0)f^k}{C_0}\right]/(2hC_0Z_0^{k+1})$$

или

$$\phi_0^{k+1} = \frac{f^{k+2} - 2f^{k+1} + f^k}{2h} * \frac{1}{C_0 Z_0^{k+1}} - \frac{(C_1 - C_0) f^{k+1}}{2hC_0^2 Z_0^{k+1}} =$$

$$= \left[\left(f^{k+2} - 2f^{k+1} + f^k \right) - \frac{(C_1 - C_0) f^{k+1}}{C_0} \right] / (2hC_0 Z_0^{k+1}) \tag{28}$$

Формулы (27) – (28) $k = \overline{1, N-1}$; $i = \overline{N-k, k}$ являются разностными аналогами формулы Даламбера. Отметим, что из формулы видно, что C_0, Z_0^{k+1} не должны быть равной нулю. Проверим

$C_0 = C(0) = 1/\sqrt{[\lambda(0) + 2\mu(0)]\rho(0)} \neq 0$, т.к. λ, μ, ρ по условии (4) ограничены сверху постоянной M_2.

$$Z(0,t) = [3\lambda(0) + 2\mu(0)]\theta_t'(0,t) \neq 0$$

т.к. λ, μ, ρ не равны нулю по условии (4) и $\theta_t'(0,t) = \frac{t}{1!}\theta(t)$, $\quad t > 0 \;\; \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

т.к. задачу рассмотрим $t > 0$, то $\theta(t) = 1$ и $\theta_t'(0,t)$ также не равно нулю.

По методике [2] можно показать сходимость пары V_i^k, ϕ_i^k решение обратной задачи (22)-(25) к точному решению пары $V(x,t)$, $\phi(x,t)$ обратной задачи (18)-(21).

Теорема. Пусть для $f(t) \in C^4([0,T])$ решение обратной задачи (18)-(21) существуют и удовлетворяет условию (17), (*), а относительно параметров уравнения выполнено условие (4) и пусть $V(x,t) \in C^4(\overline{\Delta(T)})$.

Тогда приближенное решение , построенное конечно-разностным методом, обратной задачи (22)-(25) сходится к точному решению обратной задачи (18)-(21) в классе С со скоростью порядка 0(h) при некотором «малом» Т.

Литература:

1. Коваленко А.Д. Термоупругость. - Киев: Вица школа, 1975.
2. Сатыбаев А.Дж., Каддыбаева Г.А. Численное определение коэффициента Ламэ в динамической задаче термоупругости// Проблемы управления и информатики/ Доклады II Межд. Конференции. Бишкек. 2007. С.67-71.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент Жапаров М.