

Зулпуев А.М.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ВНЕШНЕЙ ЖЕСТКОСТИ С УЧЕТОМ ЕДИНИЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

A.M. Zulpuev

DEFINITION OF ELEMENTS OF A MATRIX OF EXTERNAL RIGIDITY IN VIEW OF INDIVIDUAL MOVING FOR AN ELASTIC CORE

УДК: 624.012.45+624.012.35

В данной статье рассматривается целесообразность такой разбивки исходных стержней на элементы метода сосредоточенных деформаций, чтобы жесткости в пределах между соседними узлами были постоянны, а расчет стержневых систем по методу сосредоточенных деформаций выполнялся в перемещениях.

In given abstract is considered the expediency of such breakdown of initial cores on elements of a method of the concentrated deformations, that rigidity in limits between the next units were constant, and the account of rod systems on a method of the concentrated deformations was carried out in moving.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести понятие о фиктивных комплексных связях по плоскостям разрезки исходного стержня на элементы метода сосредоточенных деформаций [1].

Превратив k -й элемент (рис. 1) в жесткий, сохраним его деформативные свойства тем, что справа и слева по линиям разрезки введем фиктивные комплексные связи МСД, жесткость которых характеризуется матрицами $[Э]_{k, \text{прав}}$ и $[Э]_{k, \text{лев}}$.

Жесткость комплексных связей по линиям между смежными k -м и $(k+1)$ -м элементами, будет характеризоваться матрицей жесткости, вычисляемой по формуле

$$[Э]_{k, k+1} = [[Э]_{k, \text{прав}}^{-1} + [Э]_{k, \text{лев}}]^{-1} \quad (1)$$

Формула (1) вытекает из условия последовательного соединения собственных связей и суммирования их матриц податливостей, обратных матрицам жесткостей

$$[B]_{k, \text{прав}} = [Э]_{k, \text{прав}}^{-1};$$

$$[B]_{k, \text{лев}} = [Э]_{k, \text{лев}}^{-1}.$$

Если сечение упругого стержня в пределах между соседними k -м и $(k+1)$ -м узлами постоянно, то матрица

$$[Э]_{k, k+1} = [C]_{k, k+1} (l_{k, \text{прав}} + l_{k+1, \text{лев}})^{-1} \quad (2)$$

$$\text{или } [Y]_{k, k+1} = l_{k, k+1}^{-1} [C]_{k, k+1} \quad (3)$$

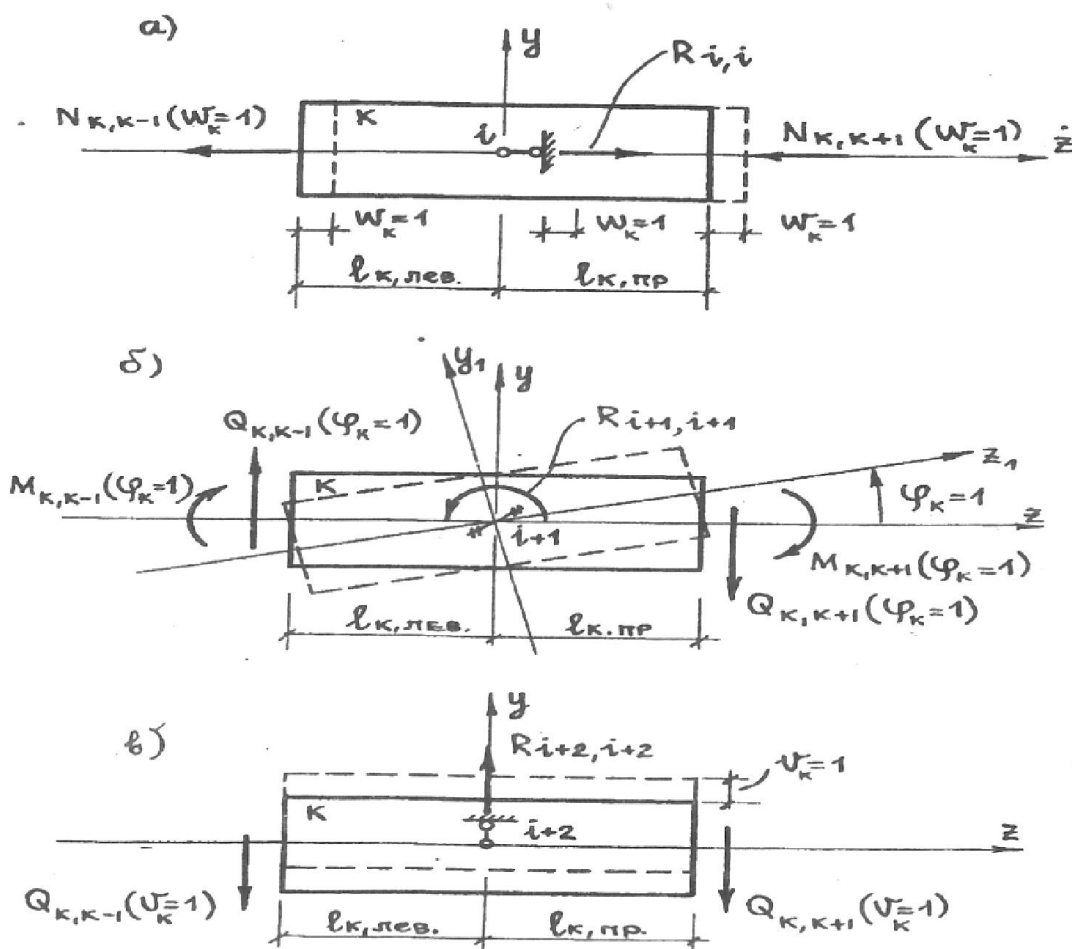


Рис. 1. К определению элементов матрицы внешней жесткости для стержня; а - единичное перемещение по оси Z; б - то же, поворот; в - то же, вдоль оси y.

Из (3) следует, что разбивку исходных стержней на элементы МСД целесообразно принимать такой, чтобы жесткости в пределах между соседними узлами были постоянны. Расчёт стержневых систем по МСД выполняется в перемещениях. Система метода перемещений имеет следующий вид [2]:

$$[R]\{v\} = \{P\} \quad (4)$$

- где $[R]$ - квадратная матрица внешней жесткости размерностью $3n \times 3n$, где n - число элементов МСД, получаемых после разрезки исходного стержня;
- $\{v\}$ - вектор перемещений узлов, в которых приложены фиктивные связи метода перемещений (ω - линейное в направлении оси Z, φ - угловое в плоскости деформирования стержня, v - перемещение в направлении оси Y);
- $\{P\}$ - вектор узловых нагрузок (продольная сила $Z_{k,q}$, изгибающий момент $M_{k,q}^x$ и сила $Y_{k,q}$ - рис.1); если элементы вектора $\{P\}$ действуют по направлению принятых перемещений, то в уравнениях (4) входят со знаком плюс.

Рис. 1. К определению элементов матрицы внешней жесткости для стержня; а - единичное перемещение по оси Z; б - то же, поворот; в - то же, вдоль оси y.

Элементами матрицы внешней жесткости $[R]$ являются реакции в фиктивных связях метода перемещений от их единичных смещений.

Найдем элементы матрицы жесткости, относящихся "к"-ому элементу МСД.

Задав перемещение $\omega_k = 1$ в направлении i -ой связи получим, исходя из формул (3)

$$N_{k,k-1} = (AE)_{k,k-1} / l_{k,k-1}; \quad (5)$$

$$N_{k,k+1} = (AE)_{k,k+1} / l_{k,k+1};$$

где: AE - осевые жесткости стержня на участках между точками "к" и "(к-1)", "к" и "(к+1)" соответственно.

Из условия равновесия (рис. 1, а.) следует $\sum Z_k = 0$:

$$R_{i,i} = (AE)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + (AE)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} \quad (6)$$

При постоянном сечении стержня по длине $AE = const$ и равномерной разбивке его на элементы МСД длиной l получим

$$R_{i,i} = 2AE / l \quad (7)$$

Реакции в аналогичных связях метода перемещений в "(к-1)"ом "(к+1)" -ом элементах от смещения $\omega_k = 1$ будут соответственно равны

$$R_{i-3,i} = R_{i,i-3} = -(AE)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} \quad (8)$$

$$R_{i,i+3} = R_{i+3,i} = -(AE)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} \quad (9)$$

Перейдем к вычислению элементов матрицы жесткости $[R]$ при перемещении "(i+1)" - ой связи на $\varphi_k = 1$ (рис. 1,б).

При угле поворота $\varphi_k = 1$ линейные перемещения концов "к"-го элемента составят:

$$v_{лев} = \varphi_k * l_{кблев} = 1 * l_{кблев}; \text{ Реактивные поперечные силы будут равны:}$$

$$\begin{aligned} Q_{k,k-1}(\varphi_k = 1) &= ((GA/\chi)/l_{k,k-1}) * l_{к,лев}; \\ Q_{k,k+1}(\varphi_k = 1) &= ((GA/\chi)/l_{k,k+1}) * l_{к,пр}; \end{aligned} \quad (10)$$

Реактивные изгибающие моменты по концам "к"-го элемента при $\varphi_k = 1$ составят:

$$\begin{aligned} M_{k,k-1}(\varphi_k = 1) &= (EJ)_{k,k-1} / l_{k,k-1}; \\ M_{k,k+1}(\varphi_k = 1) &= (EJ)_{k,k+1} / l_{k,k+1} \end{aligned} \quad (11)$$

Из условия равновесия "к"-го элемента $\sum M_k = 0$ следует

$$\begin{aligned} R_{i+1,i+1} &= EJ_{k,k-1} / l_{k,k-1} + EJ_{k,k+1} / l_{k,k+1} + \\ &+ (GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{к,лев}^2 + ((GA/\chi)_{k,k+1} * l_{к,пр}^{-1}) * l_{к,пр}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичным образом из условий равновесия (рис. 1,б) находим другие элементы матрицы жесткости $[R]$ при перемещении $\varphi_k = 1$; (см. рис. 1 а, и 1 б)

$$\begin{aligned}
 R_{i+1,i-2} = R_{i-2,i+1} &= -M_{k-1,k}(\varphi_k = 1) + Q_{k-1,k}(\varphi_k = 1) * l_{k-1,np} = \\
 &= -M_{k,k-1}(\varphi_k = 1) + Q_{k,k-1}(\varphi_k = 1) * l_{k-1,np} = \\
 &= -EJ_{k,k-1} / l_{k,k-1} + (GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} * l_{k-1,np}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\sum Y_{k-1} = 0:$$

$$\begin{aligned}
 R_{i+1,i-1} = R_{i-1,i+1} &= -Q_{k-1,k}(\varphi_k = 1) = Q_{k,k-1}(\varphi_k = 1) = \\
 &= (GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\sum Y_k = 0:$$

$$\begin{aligned}
 R_{i+1,i+2} = R_{i+2,i+1} &= -Q_{k-1,k}(\varphi_k = 1) + Q_{k,k+1}(\varphi_k = 1) = \\
 &= -(GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

$$\sum M_{k+1} = 0:$$

$$\begin{aligned}
 R_{i+1,i+4} = R_{i+4,i+1} &= -M_{k+1,k}(\varphi_k = 1) + Q_{k+1,k}(\varphi_k = 1) * l_{k+1,лев} = \\
 &= -EJ_{k+1,k} / l_{k,k+1} + (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np} * l_{k+1,лев}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\sum Y_{k+1} = 0:$$

$$\begin{aligned}
 R_{i+1,i+5} = R_{i+5,i+1} &= -Q_{k,k+1}(\varphi_k = 1) = \\
 &= -(GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Наконец, рассмотрим единичное перемещение $v_k = 1$ в направлении $(i+2)$ ой связи (рис. 1,в) Поперечные силы на левом и правом торце k -го элемента при $v_k = 1$ будут равны

$$\begin{aligned}
 Q_{k,k-1}(v_k = 1) &= (GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1}; \\
 Q_{k,k+1}(v_k = 1) &= (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1};
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Из условий равновесия следует:

$$\sum M_{k-1} = 0:$$

$$R_{i+2,i-2} = R_{i-2,i+2} = -(GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k-1,np} \tag{19}$$

$$\sum Y_{k-1} = 0:$$

$$R_{i+2,i-1} = R_{i-1,i+2} = -(GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} \tag{20}$$

$$\sum M_k = 0:$$

$$R_{i+2,i+1} = R_{i+2,i+1} = -Q_{k,k-1}(v_k = 1) * l_{k,лев} + Q_{k,k+1}(v_k = 1) * l_{k,np} = \tag{21}$$

$$= -(GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} * l_{k,лев} + (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k,np}$$

$$R_{i+2,i+2} = (GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} + (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} \tag{22}$$

$$R_{i+2,i+4} = (GA/\chi)_{k,k+1} * l_{k,k+1}^{-1} * l_{k+1,лев} \tag{23}$$

$$R_{i+2,i+5} = -(GA/\chi)_{k,k-1} * l_{k,k-1}^{-1} \tag{24}$$

Полная сводка формул для вычисления элементов матрицы внешней жесткости $[R]_k$ дана в таблице 1.

Таблица 1.

Матрица внешней жесткости $[R]_k$ для типового элемента МСД

Связи метода перемещений	(к-1) – й элемент МСД			к - й элемент МСД			(к+1) - й элемент МСД		
	$i - 3$	$i - 2$	$i - 1$	i	$i + 1$	$i + 2$	$i + 3$	$i + 4$	$i + 5$
I	$R_{i,i-3}$			$R_{i,i}$	-		$R_{i,i+3}$		
$i + 1$		$R_{i+1,i-2}$	$R_{i+1,i-2}$		$R_{i+1,i+1}$	$R_{i+1,i+2}$		$R_{i+1,i+2}$	$R_{i+1,i+5}$
$i + 2$		$R_{i+2,i-2}$	$R_{i+2,i-1}$		$R_{i+2,i+1}$	$R_{i+2,i+2}$		$R_{i+1,i+4}$	$R_{i+2,i+5}$

Из вышеизложенного следует, что при определении матрицы внешней жесткости можно использовать единичные перемещения для упругого стержня при определении жесткости сечений, элементов и стержней.

Литература:

1. Зулпуев А.М. Расчет стержней по методу сосредоточенных деформаций. //Научно-технический журнал. ФерПИ. Выпуск серии № 1, 2005. - Фергана. - 2005. - С. 86-88.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа. -1982. - 399 с.

Рецензент: д.т.н., профессор Маруфий А.Т.