

Шейшенова Ш.К.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С АДДИТИВНОЙ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Sh.K. Sheishenova

REGULARIZATION OF SINGULAR INDIGNANT PARABOLIC PROBLEM WITH ADDITIVE OSCILLATING THE RIGHT PART

УДК: 519. 633

В предыдущих работах, была изучена сингулярно возмущенная параболическая задача в случае, когда правая часть содержала только одну быстроосциллирующую функцию. В частности в работе [1] рассматривался скалярная, а в [2] многомерная задача. Присутствие в правой части быстроосциллирующей функции приводит появлению погранслоя имеющего быстроосциллирующий характер изменения.

В данной статье изучается скалярная сингулярно возмущенная задача, когда правая часть состоит из суммы быстроосциллирующих функций.

Presence at the right part quick-oscillate function results to appearance of a boundary layer having quick-oscillate character of change. In the previous work, has been studied singular indignant parabolic problem in a case, when the right part contained only one quick-oscillate function. In work 1 it is considered scalar, and in 2 multidimensional problem.

In given article is studied the scalar singular disturbed problem, when the right part consists of the sum quick-oscillate functions.

II. 1. Постановка задачи.

Рассмотрим задачу для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$L_{\varepsilon} u \equiv \partial_t u(x, t, \varepsilon) - \varepsilon^2 a(x) \partial_x^2 u(x, t, \varepsilon) - b(x, t) u(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n f_k(x, t) \exp\left(\frac{i\theta_k(t)}{\varepsilon}\right), (x, t) \in \pi,$$

$$u(x, t, \varepsilon)|_{t=0} = h(x), \quad u(x, t, \varepsilon)|_{x=i-1} = 0, i=1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, $\pi = \{(x, t) : x \in (0, 1), t \in (0, T)\}$, $i = \sqrt{-1}$.

Относительно заданных функций предполагаются выполненными следующие условия:

$$1) \quad a(x), h(x) \in C^{\infty}[0, 1], f_k(x, t), b(x, t) \in C^{\infty}(\pi), \theta(t) \in C^{\infty}[0, 1];$$

$$2) \quad a(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1], \theta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1];$$

$$3) \quad \text{выполнены условия согласования } h(0) = h(1) = 0.$$

Присутствие в правой части быстроосциллирующей функций приводит к возникновению быстроосциллирующего пограничного слоя вдоль $t=0$ и угловых пограничных слоев [3]. Показывается, что угловой пограничный слой описывается произведением функций параболического и быстроосциллирующего погранслоевых функций.

II.2. Регуляризация задачи.

Для описания пограничных слоев вводим регуляризующие переменные по формулам:

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}, \quad \eta_k = \frac{\theta_k(t) - \theta_k(0)}{\varepsilon},$$

$$\xi_l = \frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon^2}, \zeta_l = \frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon} \int_{l-1}^x \frac{ds}{\sqrt{a(s)}} = \frac{\varphi_l(x)}{\xi}, l = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Наряду с независимыми переменными x и t , введенные переменные объявим независимыми переменными расширенной функции $\tilde{u}(M, \varepsilon)$, такой что

$$\tilde{u}(M, \varepsilon)|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)} \equiv u(x, t, \varepsilon), \quad (3)$$

$$M = (x, t, v), \quad v = (\tau, \eta, \zeta, \xi), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$

где $\Psi(x, t, \varepsilon) = (\frac{t}{\varepsilon^2}, \frac{\theta(t) - \theta(0)}{\varepsilon}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^2}, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon})$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ с учетом (2)

из (3) найдем

$$\partial_t u(x, t, \eta) = (\partial_t \tilde{u}(M, \varepsilon) + \sum_{k=1}^m \eta'_k \partial_{\eta_k} \tilde{u}(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\tau \tilde{u})|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)} = \quad (4)$$

$$= (\partial_t \tilde{u} + \sum_{k=1}^n \frac{\theta'_k(t)}{\varepsilon} \partial_{\eta_k} \tilde{u}(M, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\tau \tilde{u})|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)},$$

$$\partial_x u = (\partial_x \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\xi_1} \tilde{u} \xi'_1 + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\xi_2} \tilde{u} \xi'_2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \zeta'_1 \partial_{\zeta_1} \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2} \zeta'_2 \partial_{\zeta_2} \tilde{u})|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)},$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u = & (\partial_x^2 \tilde{u} + \partial_{x\xi_1}^2 \tilde{u} \xi'_1 + \partial_{x\xi_2}^2 \tilde{u} \xi'_2 + \partial_{\xi_1}^2 \tilde{u} (\xi'_1)^2 + \partial_{\xi_2}^2 \tilde{u} (\xi'_2)^2 + \partial_{x\xi_1}^2 \tilde{u} \xi'_1 + \\ & + \partial_{x\xi_2}^2 \tilde{u} \xi'_2 + \xi''_1 \partial_{\xi_1} \tilde{u} + \xi''_2 \partial_{\xi_2} \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 [(\zeta'_l)^2 \partial_{\zeta_l}^2 \tilde{u} + 2\zeta'_l \partial_{x\zeta_l}^2 \tilde{u} + \zeta''_l(x) \partial_{\zeta_l} \tilde{u}])|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & (\partial_x^2 \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2 a(x)} \Delta_\xi \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^4 a(x)} \Delta_\zeta \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 2 \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \partial_{x\xi_l}^2 \tilde{u} + \\ & + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} (\frac{1}{\sqrt{a(x)}})' \partial_{\zeta_l} \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \partial_{x\xi_l}^2 \tilde{u} + \sum_{l=1}^2 \frac{1}{\varepsilon} (\frac{1}{\sqrt{a(x)}})' \partial_{\xi_l} \tilde{u})|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)} \end{aligned}$$

На основании (1), (3), (4), вместо задачи (1) поставим расширенную задачу

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{u} \equiv & \partial_\tau \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\tau \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^m \theta'_k(t) \partial_{\eta_k} \tilde{u} - \Delta_\xi \tilde{u} - \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_\zeta \tilde{u} - b(x, t) \tilde{u} - L_\zeta \tilde{u} - \\ & - \varepsilon L_\xi \tilde{u} - \varepsilon^2 L_x \tilde{u} = \sum_{k=1}^m f_k(x, t) \exp\left(i\eta_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right), \quad M \in Q, \\ \tilde{u}|_{t=\tau=0} = & h(x), \quad \tilde{u}|_{x=i-1, \xi_l=\zeta_l=0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Delta_\zeta = \partial_{\zeta_1}^2 - \partial_{\zeta_2}^2, \Delta_\xi = \partial_{\xi_1}^2 + \partial_{\xi_2}^2, L_{l,1} \equiv 2\varphi'_l(x) \partial_{x\xi_l}^2 + \varphi''_l(x) \partial_{\xi_l},$$

$$L_{\zeta} \equiv a(x) \sum_{l=1}^2 L_{l,1}, \quad L_{\xi} \equiv a(x) \sum_{l=1}^2 L_{l,2}, \quad L_x \equiv a(x) \partial_x^2,$$

$$L_{l,2} \equiv 2\varphi_l'(x) \partial_{x,\xi}^2 + \varphi_l''(x) \partial_{\xi}, \quad Q = \{M : x, t \in \pi, \tau, \zeta, \xi \in [0, \infty], \eta \in (-\infty, \infty)\},$$

причем $(\tilde{L}\tilde{u})_{x=\psi(x,t,\varepsilon)} \equiv L_{\varepsilon} u(x, t, \varepsilon)$ (6)

Задача (5) регулярна по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому решения этой задачи будет определить в виде ряда

$$\tilde{u}(M, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j u(M). \quad (7)$$

П.3. Итерационные задачи

Подставим (7) в задачу (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие задачи:

$$T_1 u_0 \equiv \partial_t u_0(M) - (\partial_{\zeta}^2 u_0(M) + \partial_{\xi}^2 u_0(M)) = 0, \quad T_1 u_1(M) = - \sum_{k=1}^m \partial_{\eta_k} \theta_k'(t) u_0(M)$$

$$T_1 u_2(M) = - \sum_{k=1}^m \theta_k'(t) \partial_{\eta_k} u_1(M) - T_2 u_0(M) - L_{\zeta} u_0 + \sum_{k=1}^m f_k(x, t) \exp(i\eta_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}), \quad (8)$$

$$T_1 u_k(M) = - \sum_{k=1}^m \theta_k'(t) \partial_{\eta_k} u_{k-1}(M) - T_2 u_{k-2}(M) + L_{\zeta} u_{k-2} + L_{\xi} u_{k-3} + L_x u_{k-4},$$

$$u_0(M)|_{t=\tau=\eta=0} = h_k(x), \quad u_k(M)|_{t=\tau=\eta=0} = 0, \quad u_k(M)|_{x=l-l, \xi=\zeta=0} = 0, \quad l=1, 2.$$

где $T_1 = \partial_{\tau} - \Delta_{\xi}$, $T_2 = \partial_t - \Delta_{\xi} - b(x, t)$.

Для решения итерационных задач (8) введем класс функций в котором будут они решаться. Таким классом функций является

$$U = \left\{ u(M) : u(M) = v(x, t) + \sum_{k=1}^n \exp(i\eta_k) \left[c_k(x, t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l) \right] + \sum_{l=1}^2 w_l(x, t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) \right\}$$

$$v(x, t), c_k(x, t), w_l(x, t) \in C^{\infty}(\bar{\pi}), |Y_{l,k}(N_l)| < c \exp\left(-\frac{\zeta_l^2}{8\tau}\right), \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-s^2) ds,$$

$$N_l = (x, t, \tau, \zeta_l).$$

Вычислим действие операторов участвующих в уравнении (8) на функцию $u(M) \in U$, имеем

$$T_1 u(M) = \sum_{k=1}^m \exp\left(\frac{i\theta_k(t)}{\varepsilon}\right) \sum_{l=1}^2 \left[\partial_{\tau} Y_{l,k}(N_l) - \partial_{\zeta_l}^2 Y_{l,k}(N_l) \right] \equiv \sum_{k=1}^m \exp\left(\frac{i\theta_k(t)}{\varepsilon}\right) \sum_{l=1}^2 T_{\zeta_l} Y_{l,k}(N_l).$$

$$T_2 u(M) = \sum_{k=1}^n \exp(i\eta_k) \left\{ \partial_t c_k(x, t) + \sum_{l=1}^2 \left[\partial_t Y_{l,k}(N_l) - b(x, t) Y_{l,k}(N_l) \right] - b(x, t) c_k(x, t) \right\} + \partial_t v(x, t) -$$

$$- b(x, t) v(x, t) + \sum_{l=1}^2 \left[\partial_t w_l(x, t) - b(x, t) w_l(x, t) \right] \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right),$$

$$L_{\zeta} u(M) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 \exp(i\eta_k) \left[2\varphi_l'(x) \partial_{x,\zeta}^2 Y_{l,k}(N_l) + \varphi_l''(x) \partial_{\zeta} Y_{l,k}(N_l) \right]$$

$$L_{\varepsilon} u(M) = \sum_{l=1}^2 D_{x,l}(w_l(x,t)) \partial_{\xi} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} \right) \right), D_{x,l} \equiv 2\varphi_l'(x) \partial_x + \varphi_l''(x)$$

$$\operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

$$u(M) = v(x,t) + \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \left[c_k(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l) \right] + \sum_{l=1}^2 w_l(x,t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} \right),$$

Теперь удовлетворим функцию $u(M) \in U$ краевым условием из (8):

$$h(x) = v(x,0) + \sum_{k=1}^m \left(c_k(x,0) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l) \right) \Big|_{t=\tau=0} + \sum_{l=1}^2 w_l(x,0) = 0,$$

$$0 = v(0,t) + \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \left[c_k(0,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l) \right] \Big|_{x=0, \xi_1=0, \xi_2=\frac{\varphi_2(0)}{\varepsilon^2}} + \\ + w_1(0,t) \operatorname{erfc} \left(\frac{0}{2\sqrt{t}} \right) + w_2(0,t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_2(0)}{2\varepsilon\sqrt{t}} \right) = 0,$$

$$0 = v(1,t) + \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \left[c_k(1,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}(N_l) \right] \Big|_{x=1, \xi_2=0} + w_1(1,t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_1(1)}{2\varepsilon\sqrt{t}} \right) + w_2(1,t) \operatorname{erfc}(0) = 0$$

Отсюда, пренебрегая членами порядка $O(\exp(-1/(\varepsilon t)))$, выберем значения произвольных функций в точках $t=0$, $x=0$, $x=1$ следующим образом:

$$Y_l(N_l) \Big|_{t=\tau=0} = 0, w_l(x,0) = p_l(x), v(x,0) = h(x) - \sum_{k=1}^m c_k(x,0), \\ Y_{l,k}(N_l) \Big|_{\xi_1=0} = d_{l,k}(x,t), d_{l,k}(x,t) \Big|_{x=0} = -c_k(0,t), w_1(0,t) = -v(0,t), \\ Y_{2,k}(N_2) \Big|_{\xi_2=0} = d_{2,k}(x,t), d_{l,k}(x,t) \Big|_{x=1} = -c_k(1,t), l=1,2. \quad (10)$$

В связи тем, что $w_l(x,0)$ умножается на нуль значение этой функции нами выбрано произвольно, т.е. $p_l(x)$ – произвольная функция. Из оценки $|Y_l(N_l)| < \exp(-\frac{\xi_l^2}{8\tau})$ следует, что при $\xi_l = \frac{\varphi_l(l-1)}{\varepsilon^2}$ функция

$Y_l(N_l)$ экспоненциально мала при $\varepsilon \rightarrow 0$. Исходя изэтопренебрегли в (10) слагаемыми содержащие такие функции и функций $\operatorname{erfc} \left(\frac{\varphi_l(l-1)}{2\varepsilon\sqrt{t}} \right), l=1,2,\dots$

П.4. Решение итерационных задач

Уравнение (8) при $k=0$ является однородными, поэтому оно разрешимо в U и его решение представимо в виде

$$u_0(M) = v_0(x,t) + \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \left[c_{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}^0(N_l) \right] + \sum_{l=1}^2 w_{0,l}(x,t) \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}} \right) \text{ согласно}$$

вычислениями (9)

$$T_l u_0 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 \exp(i\eta_k) [\partial_\tau Y_{l,k}^0(N_l) - \partial_{\xi_l}^2 Y_{l,k}^0(N_l)] = 0 \quad (11)$$

или отсюда получим

$$\partial_\tau Y_{l,k}^0(N_l) - \partial_{\xi_l}^2 Y_{l,k}^0(N_l) = 0, \quad l=1,2.$$

Решением последнего уравнения, при краевых условиях определяемых из (10), представимо в виде

$$Y_{l,k}^0(N_l) = d_{l,k}^0(x,t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right), \quad l=1,2,\dots \quad (12)$$

Подставим полученное решение $u_0(M)$ в свободный член уравнения (8) при $k=1$:

$$\begin{aligned} T u_1 &\equiv \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 \exp(i\eta_k) [\partial_\tau Y_{l,k}^1 - \partial_{\xi_l}^2 Y_{l,k}^1] = \\ &= - \sum_{k=1}^m i \exp(i\eta_k) \theta'_k(t) \left[c_{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}^0(N_l) \right]. \end{aligned}$$

Обеспечивая разрешимость, положим $c_{k,0}(x,t)=0$. Тогда это уравнение будет иметь решение вида (11) с индексом 1 вместо 0:

$$u_1(M) = v_1(x,t) + \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \left[c_{k,1}(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}^1(N_l) \right] + \sum_{l=1}^2 w_{l,1}(x,t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)$$

если функция $Y_{l,k}^1(N_l)$ решение уравнения $\partial_\tau Y_{l,k}^1(N_l) - \partial_{\xi_l}^2 Y_{l,k}^1(N_l) = -i\theta'_k(t) Y_{l,k}^0(N_l)$.

Перейдем к следующему итерационному уравнению (8) при $k=2$, свободный член которого, на основании вычислений (9), запишем:

$$\begin{aligned} F_2(M) &= - \sum_{k=1}^m i \exp(i\eta_k) \theta'_k(t) \left\{ c_{k,1}(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}^1(N_l) \right\} - \\ &- \left\{ \partial_t v_0(x,t) + \sum_{k=1}^m e^{i\eta_k} [\partial_t c_{k,0} + \sum_{l=1}^2 \partial_t Y_{l,k}^0(N_l)] + \sum_{l=2}^2 \partial_t w_{l,0}(x,t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) \right\} + \\ &+ b(x,t) \left[v_0(x,t) + \sum_{k=1}^m e^{i\eta_k} (c_{k,0}(x,t) + \sum_{l=1}^2 Y_{l,k}^0(N_l)) + \sum_{l=1}^2 w_{l,0}(x,t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 D_{x,l}(d_{l,k}^0(x,t)) \partial_{\xi_l} \left(\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) \right) + \sum_{k=1}^m f_k(x,t) \exp(i\eta_k + \frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что функция $\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)$ удовлетворяет уравнению $\partial_t u - \partial_{\xi}^2 u = 0$. Обеспечивая

разрешимость уравнения (8) при $k=2$ в классе функций U положим

$$\begin{aligned} i\theta'_k(t) c_{k,1}(x,t) &= f_k(x,t) \exp\left(\frac{i\theta_k(0)}{\varepsilon}\right), \quad D_{x,l} d_{0,l}(x,t) = 0, \\ \partial_t w_{0,l}(x,t) - b(x,t) w_{0,l}(x,t) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\partial_t v_0(x, t) - b(x, t) v_0(x, t) = 0.$$

Тогда, с учетом того, что $c_{k,0}(x, t) = 0$, правая часть примет вид

$$F_2(M) = - \sum_{k=1}^m \exp(i\eta_k) \sum_{l=1}^2 \left[Y_{l,k}^l(N_l) i\theta_k'(t) + \partial_t Y_{l,k}^0(N_l) - b(x, t) Y_{l,k}^0(N_l) \right]$$

Из первого уравнения определим $c_{k,l}(x, t)$, второе, третье и четвертое уравнения решают соответственно при условиях

$$d_{k,l}^0(x, t)|_{x=l-1} = -c_{k,0}(l-1, t) = 0, \quad w_{0,l}(x, t)|_{t=0} = p_{0,l}(x), \quad v_0(x, t)|_{t=0} = h(x).$$

Так как для $d_{k,l}^0(x, t)$ получим нулевое начальное условия и она определяется из однородного уравнения, то $d_{k,l}^0(x, t) = 0$. Тогда и $Y_{k,l}^0(N_l) = 0$, поэтому правая часть $F_2(M)$ перепишется:

$$F_2(M) = - \sum_{k=1}^m i\theta_k'(t) \sum_{l=1}^2 \left[Y_{l,k}^l(N_l) \right] \exp(i\eta_k)$$

Функции $w_{0,l}(x, t)$ и $v_0(x, t)$ определяется формулами

$$w_{0,l}(x, t) = p_{0,l}(x) \exp(B(x, t)), \quad B(x, t) = \int_0^t b(x, s) ds,$$

$$v_0(x, t) = h(x) \exp(B(x, t)), \quad (14)$$

здесь $p_{0,l}(x, t)$ - произвольная функция.

Уравнения (8) при $k=2$ с правой частью $F_2(M)$ разрешимо в U и его решения представимо в виде (11) с индексом 2 вместо 0, если $Y_{k,l}^2(N_l)$ - решение уравнение

$$T_{\xi,l} Y_{k,l}^2(N_l) = - \sum_{k=1}^m i\theta_k'(t) \exp(i\eta_k) d_{k,l}^l(x, t) \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right).$$

В свободный член следующего итерационного уравнения (8) при $k=3$ войдет выражение $L_{\xi} u_0(M)$, которое, согласно вычисления (9) и вида функции $u_0(M)$ из (11), запишется

$$L_{\xi} u_0(M) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^2 D_{x,l} w_{0,l}(x, t) \partial_{\xi_l} \left(\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right) \right).$$

Присутствие такого выражения в свободном члене выведет решение из U , поэтому полагая $D_{x,l} w_{0,l}(x, t) = 0$ избавляемся от этого члена. Это уравнение решаем при начальном условии

$$w_{0,l}(x, t)|_{x=l-1} = -v_0(l-1, t).$$

Подставим значения $w_{0,l}(x, t)$ из (14) в уравнение и начальное условие:

$$\left\{ 2\varphi'_{l-1}(x) \left[p_{0,l-1}'(x) + \partial_x B(x,t) p_{0,l-1}(x) \right] + \varphi''_{l-1}(x) p_{0,l-1}(x) \right\} \exp(B(x,t)) = 0$$

$$p_{0,l-1}(x) \exp(B(x,t)) \Big|_{x=k-1} = -v_0(l-1, t) = -h(l-1) \exp(B(x,t)) \Big|_{x=l-1}$$

или, после соответствующих преобразований, перепишем в виде

$$\begin{cases} 2\varphi'_{l-1}(x) p'_{0,l-1}(x) + \left[2\partial_x B(x,t) \varphi'_{l-1}(x) + \varphi''_{l-1}(x) \right] p_{0,l-1}(x) = 0, \\ p_{0,l-1}(x) \Big|_{x=l-1} = -h(l-1). \end{cases}$$

Входящая в эту задачу переменная t принимаем как параметр. Отсюда определим $p_{0,l}(x)$, а следовательно и $w_{0,l}(x, t)$. Этим мы построили главный член асимптотики, в которой отсутствуют члены содержащие $c_{k,0}(x, t)$ и $Y_{k,l}^0(N)$, но они войдут в следующую функцию $u_2(M)$.

Далее, аналогичным образом определяем остальные коэффициенты частичной суммы

$$u_{en}(M) = \sum_{r=0}^n \varepsilon^k u_k(M).$$

Производя здесь сужение посредством регуляризующих функций получим частичную сумму

$$\tilde{u}_{en}(x, t, \varepsilon) \equiv u_{en}(M) \Big|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)}$$

которая будет асимптотическим решением исходной задачи (1), т.е. справедлива следующая

Теорема: Пусть выполнены условия 1)- 3). Тогда разложение

$$u_{en}(x, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k u_k(M) \Big|_{v=\Psi(x, t, \varepsilon)}$$

является асимптотическим решением задачи (1), т.е. справедлива оценка

$$|u(x, t, \varepsilon) - u_{en}(x, t, \varepsilon)| < c\varepsilon^{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Литература:

1. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач. Бишкек - 2005.

Рецензент: к.ф.-м.н., профессор Табышов Р.Т.