

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА

Курбаналиев А.Ы., Темирбаев М.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПАКЕТЕ FEMLAB

В данной статье представлены результаты численного моделирования двумерного течения несжимаемой жидкости в канале, образованного между двумя параллельными плоскостями. Такая простая задача выбрана для того чтобы ознакомить студентов с пакетом FEMLAB.

The paper presents numerical simulation results of simple two dimensional incompressible fluid flow in a channel formed by two parallel plates. This kind of problem indented to introduce the student to FEMLAB.

Цель этой работы заключается в моделировании стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в плоскопараллельном канале с внезапным расширением в пакете FEMLAB[1]. Эта задача является типичной для вычислительной гидродинамики[2].

1. Определение математической модели. В этом случае уравнения Навье-Стокса и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеют следующий вид:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \tag{1b}$$

где u_i i -компонента скорости, η – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность жидкости, а p – давление.

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho u \frac{\partial u}{\partial x} - \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho u \frac{\partial v}{\partial x} - \rho v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \tag{2b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2c}$$

Рассмотрим стационарное течение несжимаемой жидкости в канале шириной d , с внезапным расширением, образованного двумя параллельными плоскостями, бесконечно простирающимися в направлении z . В этом случае вектор скорости течения зависит только от двух координат x и y .

Для решения данной задачи будем использовать графический интерфейс пользователя FEMLAB.

2. Навигатор моделей.

В окне *Model Navigator*, в поле размерностей пространства выбираем 2D. Далее, из списка различных областей применения FEMLAB, выбираем последовательно *Fluid Dynamics* → *Incompressible Navier-Stocks* →

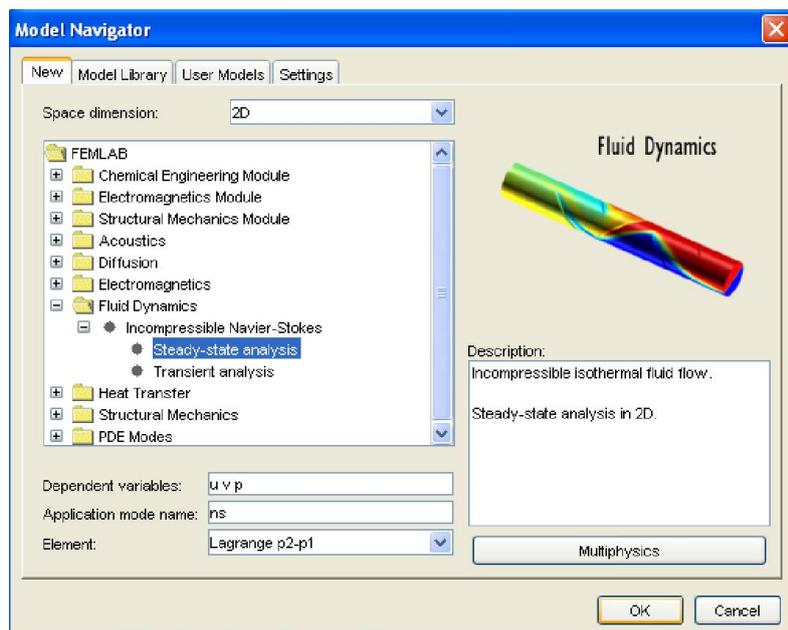


Рис.1. Выбор модели.

Steady-state analysis и нажимаем ОК.

3. Геометрическое моделирование.

В открывающемся окне, одновременно нажимая на клавиши *Shift+Rectangle/Square*, введем следующие данные двух прямоугольников R1 и R2, из которых состоит рабочая область, и нажмем ОК:

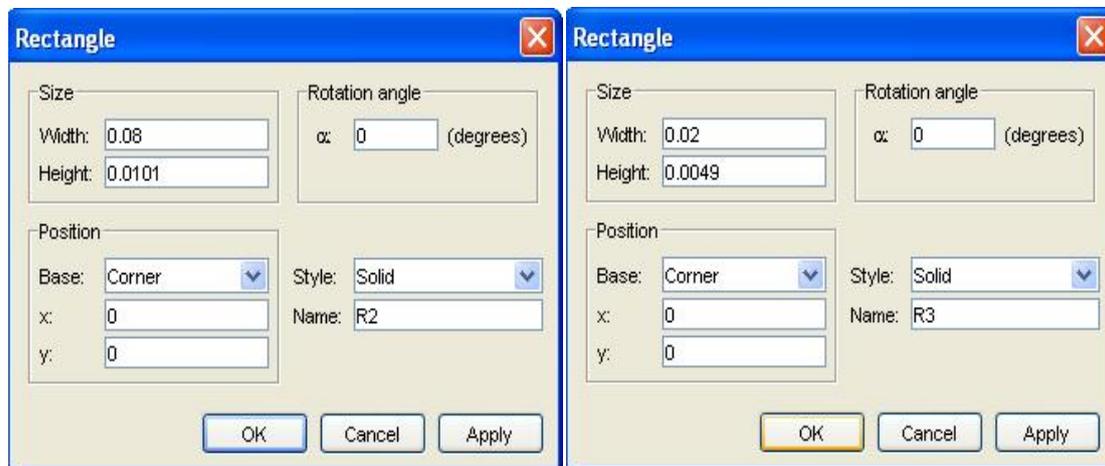


Рис. 2. Ввод данных прямоугольников R1 и R2.

Нажатие кнопки *Zoom extents* на панели инструментов приводит к следующему виду окна FEMLAB:

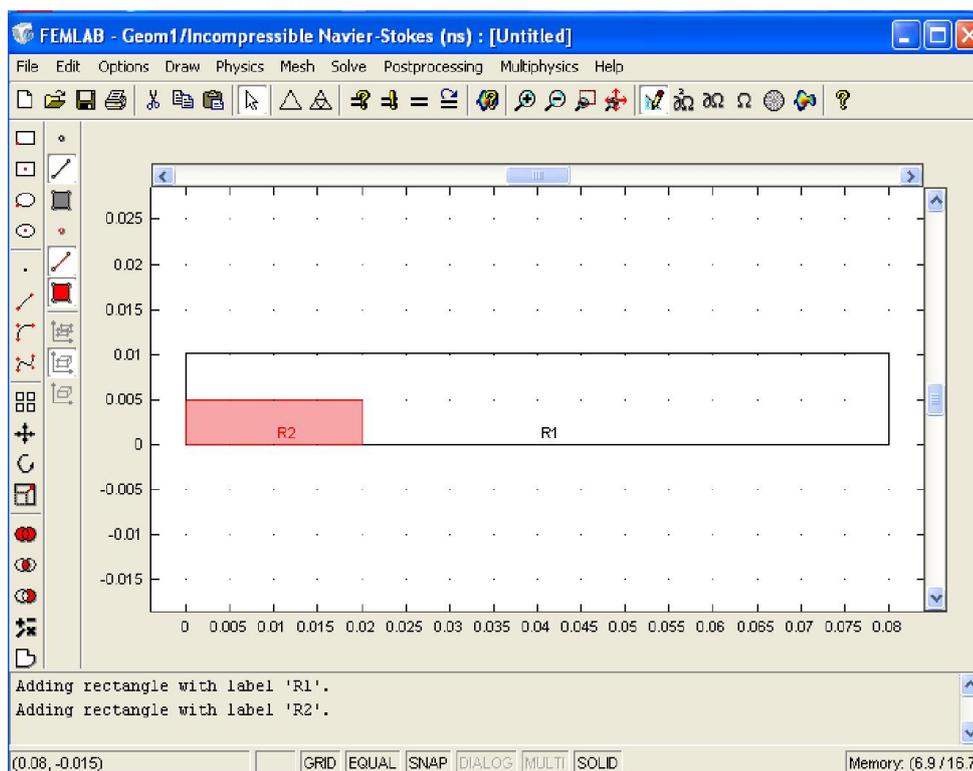


Рис. 3. Составление рабочей области из двух прямоугольников.

Далее, одновременно нажимая на клавиши *Ctrl+A* выделяем обе фигуры и нажмем на кнопку *Difference* на левоу колонке инструментов. Окончательно, расчетная область определяется как разность двух прямоугольников:

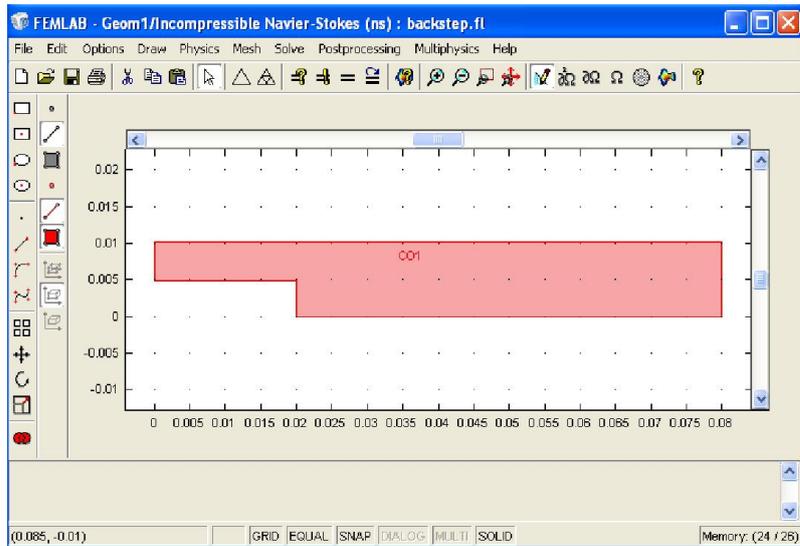


Рис. 1. Определение расчетной области задачи.

4. Ввод характерных величин задачи.

В ниспадающем меню команды *Options* выбираем пункт *Constants* введем следующие константы:

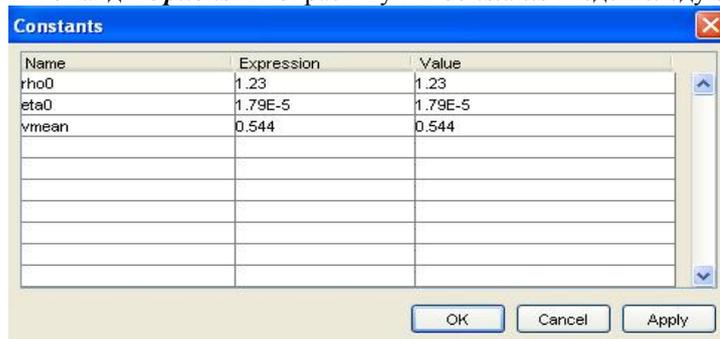


Рис. 2. Определение заданных величин задачи.

Здесь ρ_0 – плотность, η_0 – динамическая вязкость, v_{mean} – входная скорость жидкости.

5. Физическое моделирование.

5.1. Задание физических свойств расчетной области.

В данной задаче все величины определяются в системе СИ (см.рис. 2). Соответствующее число Рейнольдса определяется следующим соотношением:

$$Re = \frac{0,544 \cdot 2 \cdot 0,0049 \cdot 1,23}{1,79 \cdot 10^{-5}} = 366,33$$

В ниспадающем меню команды *Physics* выбираем *Subdomain Settings* и выбираем подобласть 1. Далее, в соответствующих полях закладки *Physics* вводим свойства жидкости согласно рис. 3. Так как рассматриваемые уравнения (2а-2с) являются нелинейными необходимо задание начальных значений поля скорости в расчетной области. Ввиду малости

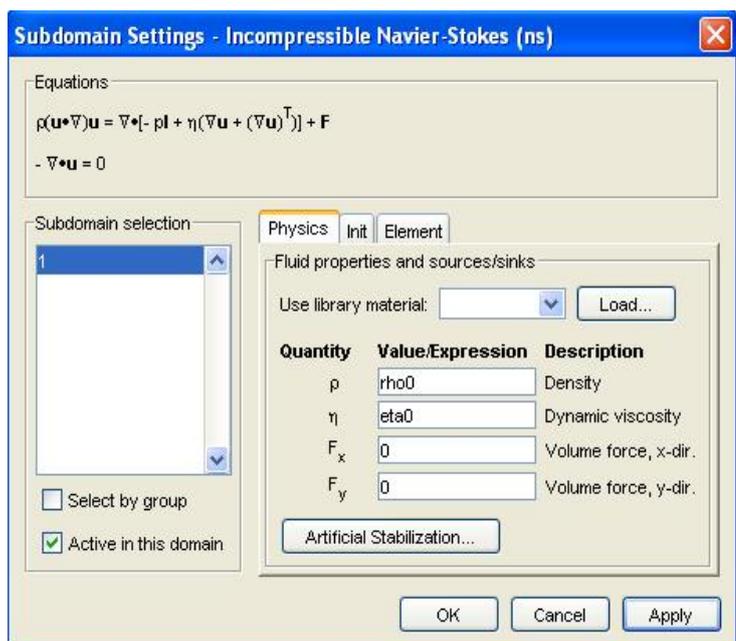


Рис. 3. Задание физических свойств жидкости.

числа Рейнольдса, а достаточно задать постоянное значение полей скорости ($u = v_{mean}$, $v = 0$, и давления $p=0$) в закладке *Init*:

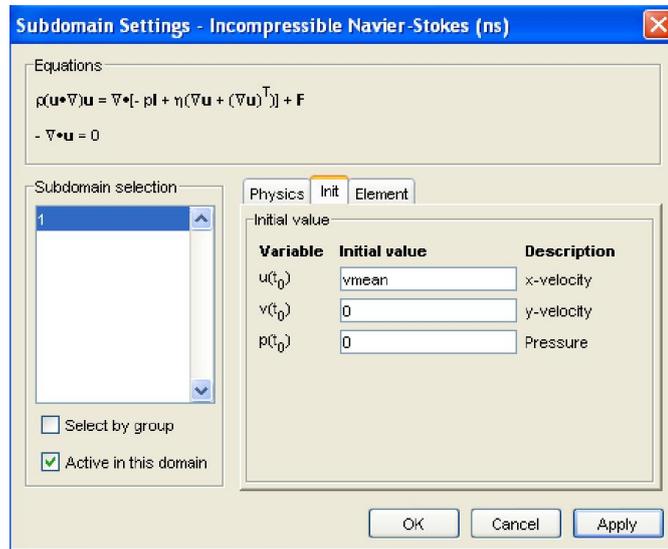


Рис. 4. Задание начального приближения полей скорости и давления.

5.2. Задание граничных условий для расчетной области.

Как известно, уравнения Навье-Стокса (2а-2б) совместно с уравнением неразрывности (2б) образуют замкнутую систему, а плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными. Для численного интегрирования этой нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка необходимо задание граничных условий. Одним из условий для скорости является условие «прилипания» - т.е. равенство нулю скорости жидкости на стенке канала.

В ниспадающем меню команды *Physics* выбираем *Boundary Settings* и в окне *Boundary Settings* вводим последовательно граничные условия для скорости и давления согласно таблице 1 (см. рис.5). Соответствующие границы выбираем из списка границ этого окна.

Таблица 1. Граничные условий для скорости и давления.

Граница	1	2-5	6
тип	вход	прилипание	выход
u	v_{mean}		
v	0		
p			0

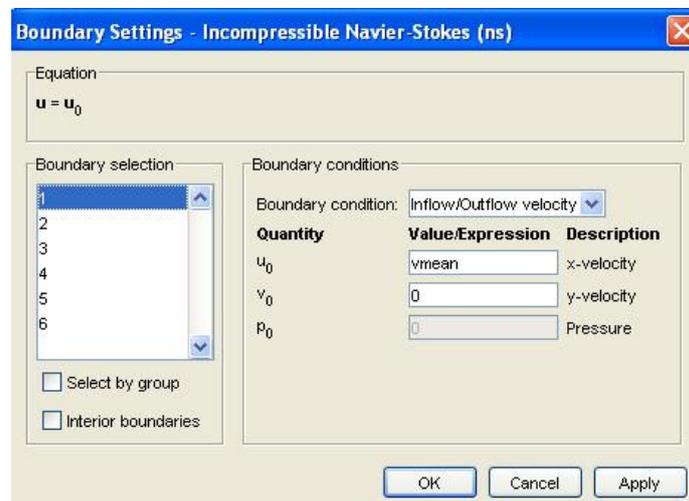


Рис. 5. Задание граничных условий.

6. Генерация расчетной сетки.

Нелинейность системы уравнений Навье-Стокса (2а-2б), обусловленная наличием конвективных членов дает определенные ограничения на расчетную сетку. Если сетка выбрана неудачно, то численное решение может не сходиться и ошибки метода расчета будут расти. С другой стороны, чрезмерное измельчение сетки приводит к большим затратам расчетного времени. Следует отметить, что до настоящего времени вследствие практически непреодолимых математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. при сохранении всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Известны лишь отдельные частные решения.

Генерации сетки в пакете FEMLAB осуществляется через диалоговое окно *Mesh Parametres*. Через команды *Mesh* в основном меню выбираем *Mesh Parametres*, и там же отмечаем закладку *Global*. В разделе *Maximum element size* вводим число 10^{-3} . Далее, в закладке *Point* выберем точку под номером 4, указываем максимальный размер элемента 10^{-4} (см. рис. 7). Эта точка соответствует внезапному расширению канала, что приводит к большому градиенту скорости. И поэтому здесь необходимо уменьшать шаг сетки.

Теперь все готово для начальной инициализации расчетной сетки. Выбирая команду *Initialize Mesh* к командной строке построим сетку, которая имеет 3190 элементов, степень свободы равна 14828 (см. рис. 8). Из рисунка видно, сгущение сетки в точке внезапного расширения канала.

7. Численное решение задачи.

Для начала решения задачи достаточно простое нажатие на кнопку *Solve Problem* на панели инструментов. После запуска, если нет никаких проблем, то по умолчанию, распределение поля скорости автоматически появляется на экране (см. рис.8). Время расчета составляет 29.656 сек.

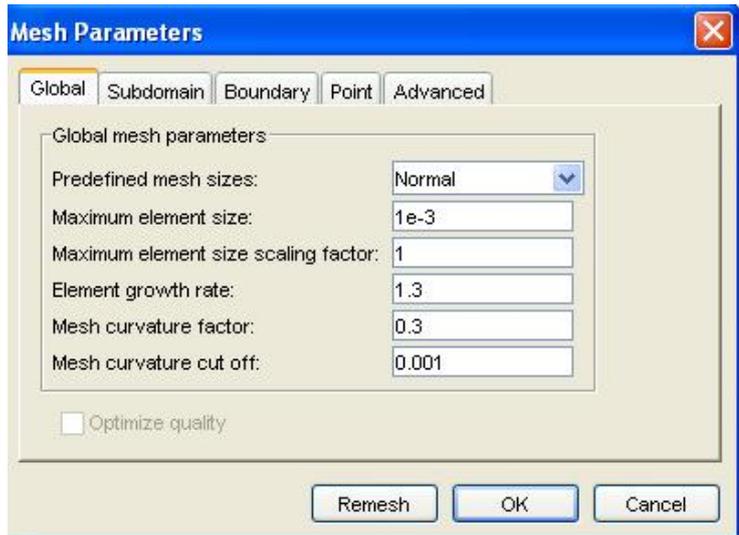


Рис. 6. Задание максимального размера расчетной сетки.

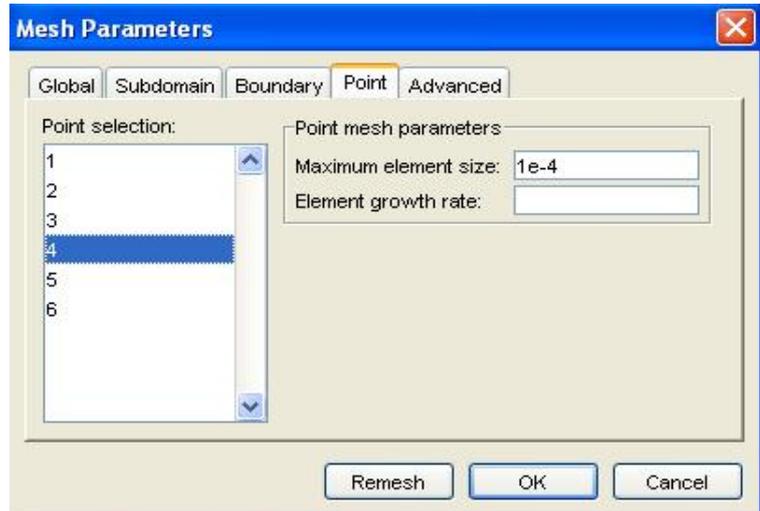


Рис. 7. Задание максимального размера расчетной сетки в

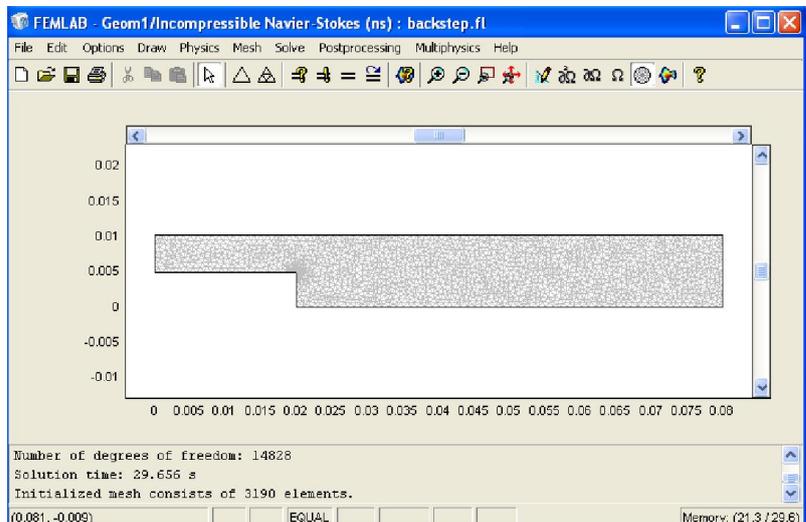


Рис. 8. Расчетная сетка.

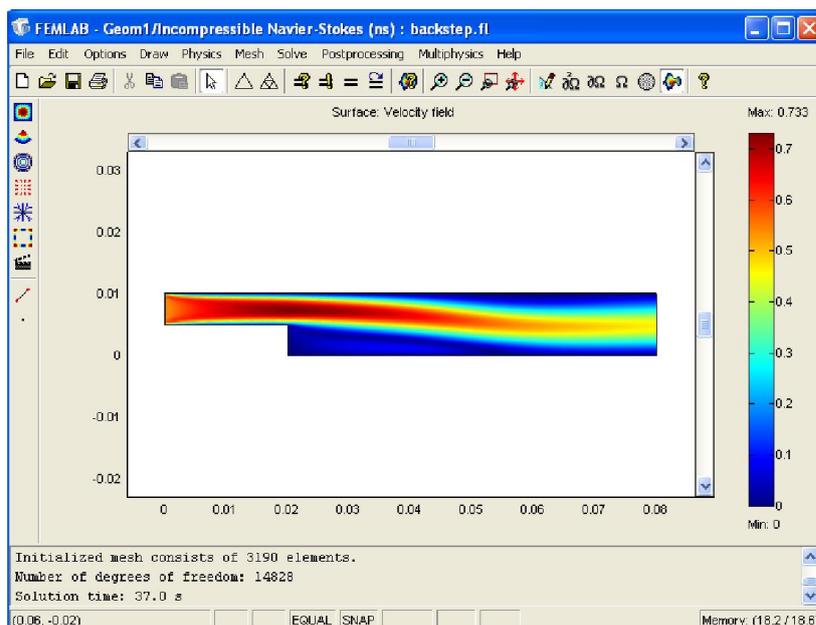


Рис. 9. Распределение вектора скорости жидкости.

8. Постпроцессорная обработка и визуализация.

Если мы хотим увидеть на одном рисунке распределения скорости и давления одновременно, то необходимо использовать комбинацию стрелки (*Arrow*) и поверхности (*Surface*)

Для этого необходимо в выпадающем меню команды *Postprocessing* выбрать *Plot parameters*. В диалоговом окне *Surface*, в разделе *Surface data, Predefined quantities* из списка выберем *Pressure*.

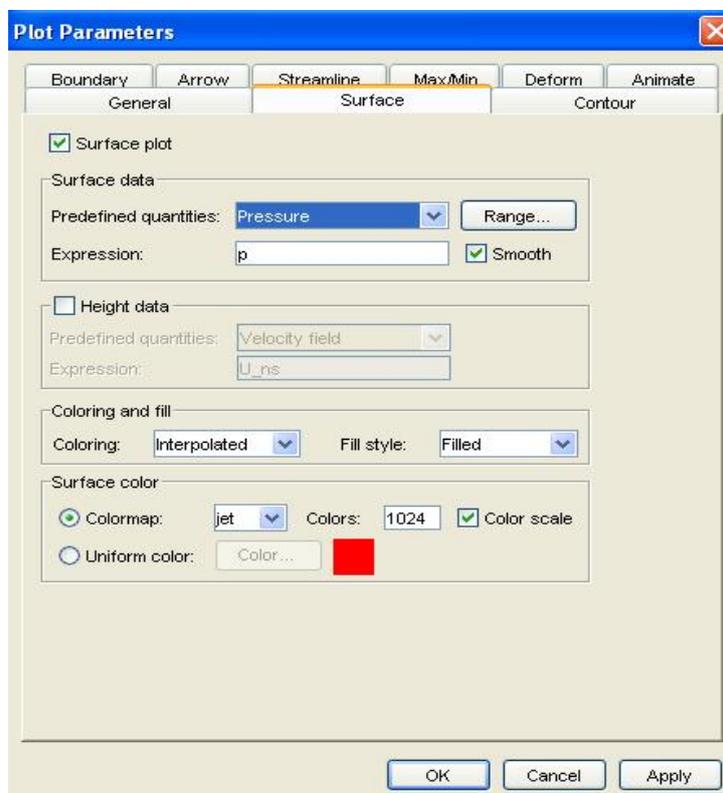


Рис. 10. Выбор параметров визуализации.

Далее, выберем закладку *Arrow*, отмечаем галочкой *Arrow plot*. Нажатие кнопки ОК приводит к построению комбинированного рисунка (см. рис. 11.). На этом рисунке поле скорости представлено стрелками, а поле давление представлено путем построения поверхностей равных значений. На входе давлении больше чем на выходе из канала, а в зоне внезапного расширения происходит падение давления, оно меньше чем на выходе из канала.

Здесь, за внезапным расширением имеет место рециркуляция потока, значение осевой скорости отрицательно, что можно использовать для визуализации рециркуляционной зоны. Для этого откроем снова диалоговое окно *Postprocessing*, *Plot parameters*, закладку *General*. Уберем галочку напротив *Arrow*, отметим *Streamline*.

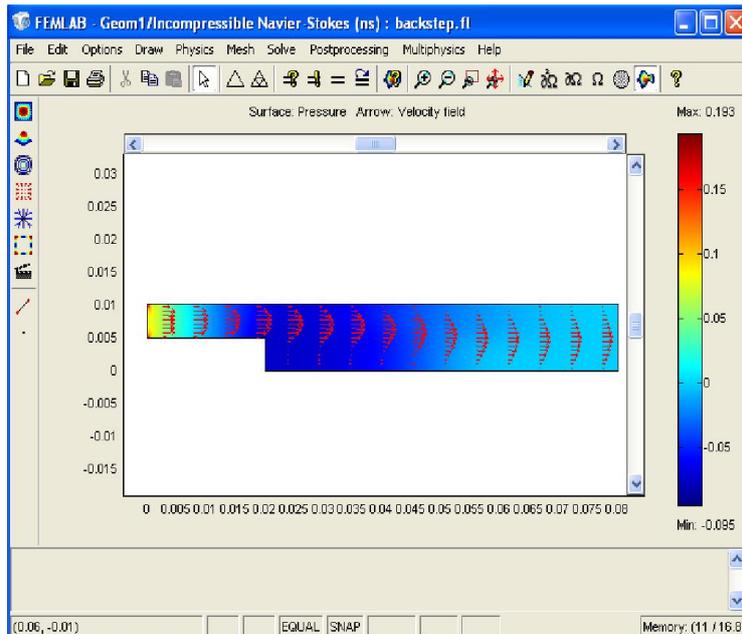


Рис. 11. Распределения полей скорости и давления

Далее, откроем закладку *Surface*. В поле *Expression* введем $(u < 0) * (x - 0.02) / 0.0049$ и уберем галочку напротив *Smooth*. Перейдем к закладке *Streamline*. В разделе *Specify start points* отметим *Specify start point coordinates*. В поле редактирования *x* введем $linspace(0.03, 0.03, 10)$, а в поле редактирования *y* введем $linspace(0, 0.0101, 10)$. В результате получим координаты 10 равностоящих друг от друга точек. Нажмем на кнопку *Color*, выберем черный цвет для рисования изолиний скорости. Нажатием кнопки ОК, закрыв это окно, получим результат, показанный на рис. 12. Здесь отчетливо видна зона рециркуляции, где имеется возвратное течение жидкости.

Таким образом, с помощью пакета FEMLAB можно сравнительно легко моделировать ламинарное течение вязкой жидкости, полученные результаты соответствуют общим закономерностям механики жидкости и газа.

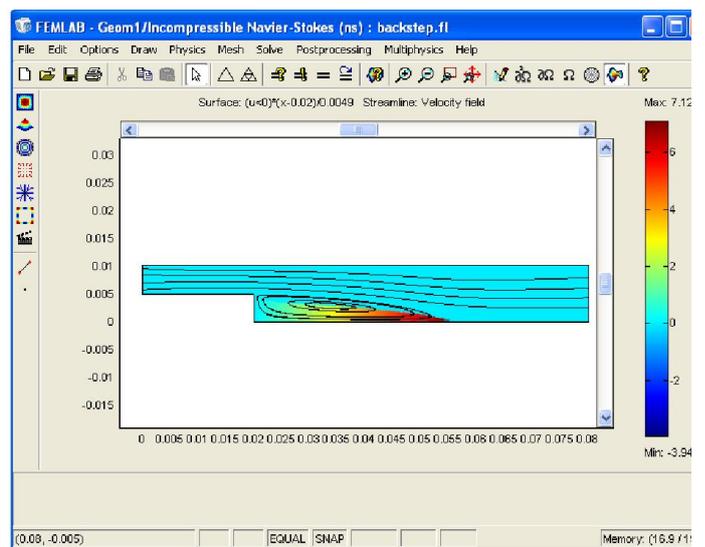


Рис. 12. Изолинии вектора скорости.

Литература

1. Comsol Inc. www.comsol.com. Femlab User's Guide.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Изд-во Дрофа, 2003, 840 стр.