Омуров Т.Д., Туганбаев М.М.

СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ПЕРЕНОСА

Omurov T.D., Tuganbaev M.M.

SINGULAR-INDIGNANT MOVING PROBLEM

УДК: 517.9

Иногда вместо изучения вырожденного уравнения приходится решать сингулярно возмущенную задачу теории переноса. Естественно возникает вопрос: в каком смысле решение возмущенной задачи сходится как будет близко к решению вырожденный задачи, когда малый параметр задачи стремится к нулю ($\varepsilon \to 0$ *). Здесь может быть слабая (в* L^p *) или сильная (в* C *) сходимость.*

С другой стороны, полученные результаты в указанном направлении (вышеуказанного класса) дают во-вторых ответы на вопрос в каком смысле устойчиво решение задачи переноса без (малого) параметра (в смысле вырожденного управления). То есть, задача переноса описывает, например, перенос заряженных частиц в нейтральном газе или «вылет» электронов в полностью ионизированной плазме и др., а сингулярно возмущенная задача есть возмущенный случай этой же задачи, причем при установлении близости решений этих задач получим устойчивость решения физического процесса в том или ином пространстве.

В данной работе изучается следующая сингулярно возмущенная задача:

$$\varepsilon L f_\varepsilon(x,t) + B(x) L_0 f_\varepsilon(x,t) + h(x,t) f_\varepsilon(x,t) = F_\varepsilon(x,t), \tag{1}$$

$$f_\varepsilon(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_\varepsilon(x),\ f_{\varepsilon t}(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_\varepsilon(x),\ x \in R,\ t \in R^+ \text{ (или } t \in [0,T]\text{)}, \tag{2}$$

$L_0 f_\varepsilon \equiv f_t + a f_x$, $0 < a = const$,

$$L f_\varepsilon \equiv f_{tt} - a^2 f_{xx}, \qquad \Omega = R \times R, \qquad \text{или} \qquad \Omega = R \times [0,T] \qquad f_\varepsilon = ? \tag{3}$$

Воспользуемся здесь подстановкой:

$$f_\varepsilon(x,t) = u(x,t) + \eta_\varepsilon(x,t), \tag{4}$$

где $u(x,t) \in C^{2,2}(\Omega)$ есть решение вырожденного уравнения

$$B(x)\big(u_t(x,t) + a u_x(x,t)\big) + h(x,t) u(x,t) = F_0(x,t),$$

которое перепишем в виде

$$u_t(x,t) + a u_x(x,t) + B^{-1}(x) h(x,t) u(x,t) = B^{-1}(x) F_0(x,t), \tag{5}$$

с начальным условием

$$u(x,t)_{t=0} = \varphi_0(x),\ u_t(x,t)\big|_{t=0} = \psi_0(x). \tag{6}$$

Вводя преобразование

$$u(x,t) = Q(x,t) \exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau) h(\tau,t) d\tau\right), \tag{7}$$

вырожденную задачу (4.1.15) – (4.1.16) сведем к задаче

$$Q_t + a Q_x = \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau) h(\tau,t) d\tau\right)\left[B^{-1}(x) F_0(x,t) + \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau) h_t(\tau,t) d\tau \cdot u(x,t)\right], \tag{8}$$

$$Q(x,t)\big|_{t=0} = \varphi_0(x) \exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau) h(\tau,0) d\tau\right) \equiv \varphi_1(x), \tag{9}$$

которую представим в эквивалентном виде

$$Q(x,t)=\varphi_1(x-at)+\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[B^{-1}(x-a(t-s))F_0(x-a(t-s),s)+$$
$$+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(x-a(t-s),s)\Big]ds. \tag{10}$$

Лемма 1. Интегральное уравнение (10) эквивалентно задаче (8) – (9).

Доказательство. Дифференцируя (10) по t и x:

$$Q_t=-a\varphi_{1x}(\tau_6)+\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)\right)\left[B^{-1}(x)F_0(x,t)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\cdot u(x,t)\right]+$$
$$+\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[-B^{-2}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)h(\tau_1,s)+aB^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)-$$
$$-aB^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)-\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau_1,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)-B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)u(\tau_1,s)-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau u_x(\tau_1,s)\Big]ds,$$

$$Q_x=\varphi_{1x}(\tau_6)+\int\limits_{-\infty}^{t} \exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\left[\frac{1}{a}B^{-2}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)h(\tau_1,s)-B^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\right.$$
$$+B^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)+\frac{1}{a^2}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)+\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)u(\tau_1,s)+$$
$$\left.+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u_x(\tau_1,s)\right]ds$$

и подставляя в (8), получим тождество. Начальное условие (9) удовлетворяется очевидно. Лемма доказана.

Исключая теперь функцию Q из системы (7), (10),имеем

$$u(x,t)=\varphi_0(x-at)\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-at} B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)+$$
$$+\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\cdot\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\Big[B^{-1}(x-a(t-s))F_0(x-a(t-s),s)+$$
$$+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(x-a(t-s),s)\Big]ds. \tag{11}$$

Лемма 2. Интегральное уравнение (11) эквивалентно задаче (5) – (6).

Доказательство. Дифференцируя (11) по t и x:

$$u_t=B^{-1}(x)F_0(x,t)+\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)u(x,t)+\exp\left(\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\tau_6} B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\times$$
$$\times\left[-a\varphi_{0x}(\tau_6)-\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(\tau_6)h(\tau_6,0)-\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)\cdot\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\right]+\exp\left(-\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{x} B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{a}\int_{\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,t)d\tau\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\left[B^{-1}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)\right]ds+\right.$$

$$+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\left[-B^{-2}(\tau_1)h(\tau_1,s)F_0(\tau_1,s)-\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)+\right.$$

$$\left.\left.+aB^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)-aB^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)-B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)\cdot u(\tau_1,s)-\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u_x(\tau_1,s)\right]ds\right\},$$

$$u_x=\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_6}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\left[\varphi_{0x}(\tau_6)+\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(\tau_6)h(\tau_6,0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\varphi_0(\tau_6)B^{-1}(x)h(x,t)\right]+\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)\right)\left\{-\frac{1}{a}B^{-1}(x)h(x,t)\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\times\right.$$

$$\times\left[B^{-1}(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)\right]ds+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{a}B^{-2}(\tau_1)h(\tau_1,s)F_0(\tau_1,s)+\frac{1}{a^2}B^{-1}(\tau_1)h(\tau_1,s)\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)d\tau\cdot u(\tau_1,s)-B^{-2}(\tau_1)B_x(\tau_1)F_0(\tau_1,s)+\right.$$

$$\left.\left.+B^{-1}(\tau_1)F_{0x}(\tau_1,s)+\frac{1}{a}B^{-1}(\tau_1)h_t(\tau_1,s)+\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\tau_1}B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)\cdot u_x(\tau_1,s)\right]ds\right\}$$

и подставляя в уравнение (5) получим тождество

$B^{-1}(x)F_0(x,t)\equiv B^{-1}(x)F_0(x,t)$.

Теорема 1. При выполнении условий:

a) $|\varphi_0(x-at)|\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-at}B^{-1}(\tau)h(\tau,0)d\tau\right)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\le\gamma_1$,

b) $\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)B^{-1}(x-a(t-s))|F_0(x-a(t-s),s)|ds\le\gamma_2$, $\gamma_3=\gamma_1+\gamma_2$,

c) $\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x}B^{-1}(\tau)h(\tau,t)d\tau\right)\int_0^t\exp\left(\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{x-a(t-s)}B^{-1}(\tau)h(\tau,s)d\tau\right)\int_{-\infty}^{x-a(t-s)}|B^{-1}(\tau)h_t(\tau,s)|d\tau\le\gamma_4$, $\gamma_4<1$,

единственное решение задачи (5) – (6) равномерно ограничено.

Доказательство. Действительно, при выполнении условий a – c, имеем

$|u(x,t)|\le\gamma_3+\gamma_4\|u(x,t)\|$, откуда следует $\|u(x,t)\|\le\frac{\gamma_3}{1-\gamma_4}$, что и завершает доказательство теоремы.

Методом от противного, то есть предполагая существование двух решений $u(x,t)$, $\bar{u}(x,t)$, доказывается единственность решения.

Вернемся к сингулярно возмущенной задаче (1) – (2). Подстановка (4) приводит относительно новой неизвестной функции $\eta_\varepsilon(x,t)$ к задаче

$$\varepsilon\left(\eta_{\varepsilon tt}-a^2\eta_{\varepsilon xx}\right)+B(x)\left(\eta_{\varepsilon t}+a\eta_{\varepsilon x}\right)+h\eta_\varepsilon=F_\varepsilon(x,t)-F_0(x,t)-\varepsilon\left(u_{tt}-a^2u_{xx}\right), \quad (12)$$

$$\eta_\varepsilon(x,t)\big|_{t=0}=\varphi_\varepsilon(x)-\varphi_0(x)\equiv\delta_\varepsilon^0(x),\ \eta_{\varepsilon t}(x,t)\big|_{t=0}=\psi_\varepsilon(x)-\psi_0(x)\equiv\delta_\varepsilon^1(x), \quad (13)$$

которая при помощи подстановки вида (4.1.3) сводится к задаче

$$\varepsilon\left(Z_t-aZ_x\right)+B(x)Z=-h\eta_\varepsilon+F_\varepsilon(x,t)-F_0(x,t)-\varepsilon\left(u_{tt}-a^2u_{xx}\right), \quad (14)$$

$$Z(x,t)\big|_{t=0}=\delta_\varepsilon^1(x)+a\delta_{\varepsilon x}^0(x)\equiv\theta_\varepsilon(x),\ \left|\theta_\varepsilon(x)\right|\le(1+a)\Delta(\varepsilon)\equiv\Delta_0(\varepsilon), \quad (15)$$

$\left|F_\varepsilon-F_0\right|\le\Delta_1(x)$ - достаточно малая величина.

Применяя преобразования, задачу (14)-(15) можно привести к интегральной форме и доказать следующую лемму

Лемма 3. Интегральной формой задачи (14) – (15) является

$$\eta_\varepsilon(x,t)=\delta_\varepsilon^0(x-at)+\int_0^t\Big\{\theta_\varepsilon(x-a(t-s)+as)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s)+as}B(\tau)d\tau\right)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s)+a(s-s')}B(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\big[-h(x-a(t-s)+a(s-s'),s')B_\varepsilon(x-a(t-s)+a(s-s'),s')-\varepsilon\big(u_{tt}(x-a(t-s)+a(s-s'),s')-$$

$$-a^2u_{xx}(x-a(t-s)+a(s-s'),s')\big)+F_\varepsilon(x-a(t-s)+a(s-s'),s')--F_0(x-a(t-s)+a(s-s'),s')\big]ds'\Big\}ds\,. \quad (16)$$

Доказательство. Дифференцируем (16) по t и x дважды:

$$\eta_{\varepsilon t}=-a\delta_{\varepsilon x}^0(x-at)+\theta_\varepsilon(\tau_2)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_2}B(\tau)d\tau\right)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_5}B(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\left[-h(\tau_s,s')\eta_\varepsilon(\tau_s,s')-\varepsilon\left(u_{tt}(\tau_5,s')-a^2u_{xx}(\tau_5,s')\right)+F_\varepsilon(\tau_5,s')-F_0(\tau_5,s')\right]ds'+$$

$$+\int_0^t\left\{-a\theta_{\varepsilon x}(\tau_4)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_4}B(\tau)d\tau\right)+\frac{1}{\varepsilon}\theta_\varepsilon(\tau_4)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_4}B(\tau)d\tau\right)\left(B(\tau_4)-B(\tau_1)\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\left[\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_3}B(\tau)d\tau\right)\left(-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon\left(u_{tt}(\tau_3,s')-a^2u_{xx}(\tau_3,s')\right)+F_\varepsilon(\tau_3,s')-F_0(\tau_3,s')\right)\times\right.$$

$$\times\left(B(\tau_3)-B(\tau_1)\right)-a\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_3}B(\tau)d\tau\right)\left(-h_x(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-h(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-\right.$$

$$\left.\left.-\varepsilon\left(u_{ttx}(\tau_3,s')-a^2u_{xxx}(\tau_3,s')\right)+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_{0x}(\tau_3,s')\right)\right]ds'\Big\}ds\,,$$

$$\eta_{\varepsilon x}=\delta_{\varepsilon x}^0(x-at)+\int_0^t\Big\{\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_4}B(\tau)d\tau\right)\left[\theta_{\varepsilon x}(\tau_4)-\frac{1}{\varepsilon a}\theta_\varepsilon(\tau_4)\left(B(\tau_4)-B(\tau_1)\right)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_3}B(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\Big[-\frac{1}{\varepsilon a}\left(B(\tau_3)-B(\tau_1)\right)\left(-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon\left(u_{tt}(\tau_3,s')-a^2u_{xx}(\tau_3,s')\right)+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_0(\tau_3,s')\right)+$$

$$+\left(-h_x(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-h(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-\varepsilon\left(u_{t^2x}(\tau_3,s')-a^2u_{x^3}(\tau_3,s')\right)+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_0(\tau_3,s')\right)\Big]ds'\Big\}ds,$$

$$\eta_{\varepsilon t^2}=a^2\delta_{\varepsilon x^2}^0(x-at)+\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_2}B(\tau)d\tau\right)\left(-\frac{1}{\varepsilon}\theta_\varepsilon(\tau_2)B(\tau_2)+a\theta_{\varepsilon x}(\tau_2)\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left[-h(x,t)B_\varepsilon(x,t)-\varepsilon\left(u_{t^2}(x,t)-a^2u_{x^2}(x,t)\right)+F_\varepsilon(x,t)-F_0(x,t)\right]+\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_2}B(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times\left[-a\theta_{\varepsilon x}(\tau_2)+\frac{1}{\varepsilon}\theta_\varepsilon(\tau_2)(B(\tau_2)-B(x))\right]+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_5}B(\tau)d\tau\right)\{\ \frac{1}{\varepsilon}[-h(\tau_5,s')\eta_\varepsilon(\tau_5,s')-$$

$$-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_5,s')-a^2u_{x^2}(\tau_5,s'))+F_\varepsilon(\tau_5,s')-F_0(\tau_5,s')(B(\tau_5,s')-B(x))]-a[-h_x(\tau_5,s')\eta_\varepsilon(\tau_5,s')-$$

$$-h(\tau_5,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_5,s')-\varepsilon(u_{t^2x}(\tau_5,s')-a^2u_{x^3}(\tau_5,s'))+F_{\varepsilon x}(\tau_5,s')-F_{0x}(\tau_5,s')]\}ds'+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_x^{\tau_5}B(\tau)d\tau\right)\{\ \frac{B(\tau_5)}{\varepsilon}[-h(\tau_5,s')\eta_\varepsilon(\tau_5,s')-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_5,s')-a^2u_{x^2}(\tau_5,s'))+F_\varepsilon(\tau_5,s')-$$

$$-F_0(\tau_5,s')]+a[-h_x(\tau_5,s')\eta_\varepsilon(\tau_5,s')-h(\tau_5,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_5,s')-\varepsilon(u_{t^2x}(\tau_5,s')-a^2u_{x^3}(\tau_5,s'))+F_{\varepsilon x}(\tau_5,s')-$$

$$-F_{0x}(\tau_5,s')]\}ds'+\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_4}B(\tau)d\tau\right)\left\{a^2\theta_{\varepsilon x^2}(\tau_4)-\frac{a}{\varepsilon}\theta_{\varepsilon x}(\tau_4)(B(\tau_4)-B(\tau_1))+\left[-\frac{a}{\varepsilon}\theta_{\varepsilon x}(\tau_4)\times\right.\right.$$

$$\left.\times(B(\tau_4)-B(\tau_1))+\frac{1}{\varepsilon^2}\theta_\varepsilon(\tau_4)(B(\tau_4)-B(\tau_1))^2-\frac{a}{\varepsilon}\theta_\varepsilon(\tau_4)(B_x(\tau_4)-B_x(\tau_1))\right]+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_3}B(\tau)d\tau\right)\{\ \frac{1}{\varepsilon^2}[-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^2}(\tau_3,s'))+F_\varepsilon(\tau_3,s')-$$

$$-F_0(\tau_3,s')](B(\tau_3)-B(\tau_1))^2-\frac{2a}{\varepsilon}[-h_x(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-h(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2x}(\tau_3,s')-a^2u_{x^3}(\tau_3,s'))+$$

$$+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_{0x}(\tau_3,s')](B(\tau_3)-B(\tau_1))-\frac{a}{\varepsilon}(-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^2}(\tau_3,s'))+$$

$$+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_{0x}(\tau_3,s')](B_x(\tau_3)-B_x(\tau_1))+a^2[-h_{x^2}(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-2h_x(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-$$

$$-\varepsilon(u_{t^2x^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^4}(\tau_3,s'))+F_{\varepsilon x^2}(\tau_3,s')-F_{0x^2}(\tau_3,s')]]ds'\}ds\,,$$

$$\eta_{\varepsilon x^2}=\delta^0_{\varepsilon x^2}(x-at)+\int_0^t\{\ \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_4}B(\tau)d\tau\right)[\theta_{\varepsilon x^2}(\tau_4)+\frac{1}{\varepsilon^2a^2}\theta_\varepsilon(\tau_4)(B(\tau_4)-B(\tau_1))^2-$$

$$-\frac{2}{\varepsilon a}\theta_{\varepsilon x}(\tau_4)(B(\tau_4)-B(\tau_1))-\frac{1}{\varepsilon a}\theta_\varepsilon(\tau_4)(B_x(\tau_4)-B_x(\tau_1))\ ]+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon a}\int_{\tau_1}^{\tau_3}B(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times[\ \frac{1}{\varepsilon^2a^2}(B(\tau_3)-B(\tau_1))^2(-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^2}(\tau_3,s'))+F_\varepsilon(\tau_3,s')-F_0(\tau_3,s'))-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon a}(B_x(\tau_3)-B_x(\tau_1))(-h(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^2}(\tau_3,s'))+F_\varepsilon(\tau_3,s')-F_0(\tau_3,s'))-$$

$$-\frac{2}{\varepsilon a}(B(\tau_3)-B(\tau_1))(-h_x(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-h(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-\varepsilon(u_{t^2x}(\tau_3,s')-a^2u_{x^3}(\tau_3,s'))+$$

$$+F_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-F_{0x}(\tau_3,s'))+(-h_{x^2}(\tau_3,s')\eta_\varepsilon(\tau_3,s')-2h_x(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x}(\tau_3,s')-h(\tau_3,s')\eta_{\varepsilon x^2}(\tau_3,s')-$$

$$-\varepsilon(u_{t^2x^2}(\tau_3,s')-a^2u_{x^4}(\tau_3,s'))+F_{\varepsilon x^2}(\tau_3,s')-F_{0x^2}(\tau^3,s'))]ds'\}ds\,.$$

Подставляя производные в (12), получим тождество

$$F_\varepsilon(x,t)-F_0(x,t)-\varepsilon(u_{t^2}-a^2u_{x^2})\equiv F_\varepsilon(x,t)-F_0(x,t)-\varepsilon(u_{t^2}-a^2u_{x^2}).$$