Туганбаев М.М.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЕРНОЙ ФУНКЦИЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Tuganbaev M.M.

INVERSE PROBLEM FOR THE KINETIC EQUATION WITH THE TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTION FUNCTION

УДК 517.9

В работе рассматривается обратная задача для линейного дифференциального уравнения типа Больцмана для двумерной функции распределения.

In this article is studied inverse problem for the linear differential equation Boltzman type with two-dimensional distribution function.

Прямая задача в односкоростном случае была изучена в работе [1]. Задачи такого типа возникают, например, в изучении «вылета» электронов ионизированной плазмы, в теории полупроводников, в биофизике [2] - [6].

Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимаются задачи определения коэффициентов или правых частей уравнений по некоторым функционалам от их решений. При этом предполагается, что искомые коэффициенты зависят от одной переменной.

Пусть рассматривается линейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial t}+a(u)\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial u}+b(\upsilon)\frac{\partial f(u,\upsilon,t)}{\partial \upsilon}+h_0(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)=b(t)F(u,\upsilon,t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$f(u,\upsilon,t)\big|_{t=0}=f_0(u,\upsilon),\quad (u,\upsilon,t)\in\Omega\equiv R^2\times R_+,\quad R_+=[0,\infty), \tag{2}$$

где $F(u,\upsilon,t)$ - заданная функция, $h_0(u,\upsilon)$ - известная неотрицательная функция, для которой имеет место разложение

$$h_0(u,\upsilon)=\lambda_1(u)+\lambda_2(\upsilon)+h(u,\upsilon)\,, \tag{3}$$

а неизвестная функция $f(u,\upsilon,t)$ в ряде задач переноса представляет собой функцию распределения, зависящую от фазовых переменных $u,\upsilon\in(-\infty,+\infty)$ и времени $t\ge 0$.

Рассмотрим обратную задачу, заключающуюся в определении пары $(f(u,\upsilon),b(t))$, при выполнении условий задачи (1) - (3) в случае $h(u,\upsilon)\equiv 0$ и при наличии дополнительной информации (4).

$$f(u^0,\upsilon^0,t)=\psi(t),\ \ \psi(t)\in C^1(R_+)\,. \tag{4}$$

Для решения задачи введем преобразование вида

$$f(u,\upsilon,t)=Q(u,\upsilon,t)\exp\left(-\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right),\quad \forall u,\upsilon\in R^2,\ \forall t\in R_+. \tag{5}$$

Тогда для новой неизвестной функции $Q(u,\upsilon,t)$ получим задачу :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial t} + a(u)\dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial u} + b(\upsilon)\dfrac{\partial Q(u,\upsilon,t)}{\partial \upsilon} = \\ = \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{u}\dfrac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\upsilon}\dfrac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\left[b(t)F(u,\upsilon,t) - h(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)\right], \\ \\ Q(u,\upsilon,t)\big|_{t=0} = \varphi(u,\upsilon), \forall(u,\upsilon)\in R^2, \end{cases} \tag{6}$$

где $(f;Q)$ - решение системы (5), (6), а

$$\varphi(u,\upsilon) = f_0(u,\upsilon)\exp\left(\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right).$$

Введем функции $\rho_1 = \rho_1(u,t,s),\ \rho_2 = \rho_2(\upsilon,t,s),$ для которых имеют место условия

$$\rho'_{1t}(u,t,s) + a(u)\rho'_{1u}(u,t,s) = 0,\ \ \rho_1(u,t,t) = u;$$

$$\rho'_{2t}(\upsilon,t,s) + b(\upsilon)\rho'_{2\upsilon}(\upsilon,t,s) = 0,\ \ \rho_2(\upsilon,t,t) = \upsilon. \tag{7}$$

Лемма 1. При условии (7) задача (6) приводится к эквивалентному виду

$$\begin{aligned} Q(u,\upsilon,t) &= \varphi(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0)) + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\rho_1(u,t,s)}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\rho_2(\upsilon,t,s)}\frac{\lambda(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\times \\ &\times\left[b(s)F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s) - h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))f(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)\right]ds. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. В самом деле, обозначая $\rho_{10}\equiv\rho_1(u,t,0)$, $\rho_{20}\equiv\rho_2(\upsilon,t,0)$ и дифференцируя (8) по t, u и υ:

$$Q'_t = \varphi'_u(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{10t} + \varphi'_\upsilon(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{20t} + \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$

$$\times\left[b(t)F(u,\upsilon,t) - h(u,\upsilon)f(u,\upsilon,t)\right] + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left(\frac{\lambda_1(\rho_1)}{a(\rho_1)}\rho'_{1t} + \frac{\lambda_2(\rho_2)}{b(\rho_2)}\rho'_{2t}\right)\times$$

$$\times\left[b(s)F(\rho_1,\rho_2,s) - h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)\right]ds + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$

$$\times\left[b(s)F'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1t} + b(s)F'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2t} - \left(h'_u(\rho_1,\rho_2)\rho'_{1t} + h'_\upsilon(\rho_1,\rho_2)\rho'_{2t}\right)f(\rho_1,\rho_2,s) - \right.$$

$$\left. - h(\rho_1,\rho_2)\left(f'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1t} + f'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2t}\right)\right]ds,$$

$$Q'_u = \varphi'_u(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{10u} + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\frac{\lambda_1(\rho_1)}{a(\rho_1)}\rho'_{1u}\times$$

$$\times\left[b(s)F(\rho_1,\rho_2,s) - h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)\right]ds + \int\limits_0^t \exp\left(\int\limits_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int\limits_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$

$$\times\left[b(s)F'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1u} - h'_u(\rho_1,\rho_2)\rho'_{1u}f(\rho_1,\rho_2,s) - h(\rho_1,\rho_2)f'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1u}\right]ds,$$

$$Q'_\upsilon = \varphi'_\upsilon(\rho_{10},\rho_{20})\rho'_{20\upsilon} + \int_0^t \exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\frac{\lambda_2(\rho_2)}{b(\rho_2)}\rho'_{2\upsilon}\times$$

$$\times[b(s)F(\rho_1,\rho_2,s) - h(\rho_1,\rho_2)f(\rho_1,\rho_2,s)]ds + \int_0^t \exp\left(\int_{-\infty}^{\rho_1}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)} + \int_{-\infty}^{\rho_2}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$

$$\times[b(s)F'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2\upsilon} - h'_\upsilon(\rho_1,\rho_2)\rho'_{2\upsilon}f(\rho_1,\rho_2,s) - h(\rho_1,\rho_2)f'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2\upsilon}\ ]ds,$$

а затем подставляя в (6), получим тождество

$$\exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi + \int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)b(t)F(u,\upsilon,t) \equiv \exp\left(\int_{-\infty}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi + \int_{-\infty}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)b(t)F(u,\upsilon,t),$$

что и требовалось доказать.

Уравнения (5), (8) представляют собой линейную функционально-алгебраическую систему относительно $(f;Q)$, и функцию $Q(u,\upsilon,t)$ можно исключить из этой системы. Поэтому, подставляя (8) в (5) и проведя алгебраические операции, получим

$$f(u,\upsilon,t) = f_0(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi - \int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right) +$$

$$+\int_0^t \exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,s)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)}{a(\xi)}d\xi - \int_{\rho_2(\upsilon,t,s)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)}{b(\eta)}d\eta\right)\times$$

$$\times[b(s)F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s) - h(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s))f(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)]ds. \qquad (9)$$

Лемма 2. Уравнение (9) является эквивалентным интегральным представлением задачи (1), (2).

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 1.

Замечание. Если в уравнении (1) $a(u) = a = const, b(\upsilon) = \upsilon = const$, то интегральное преобразование будет выглядеть следующим образом $f(u,\upsilon,t) = Q(u,\upsilon,t)\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi - \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right)$,

а интегральное представление задачи (1) - (2) запишется в виде

$$f(u,\upsilon,t) = f_0(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s))\exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi - \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right) +$$

$$+\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{u}\lambda_1(\xi)d\xi - \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\upsilon}\lambda_2(\eta)d\eta\right)[b(s)F(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s),s) -$$

$$-h(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s))f(u-a(t-s),\upsilon-b(t-s),s)]ds.$$

Рассмотрим обратную задачу для уравнения (1) с условием (2) и переопределением (4), в случае, когда имеет место разложение (3) с $h(u,\upsilon) \equiv 0$.

В этом случае интегральным представлением задачи (1), (2) будет

$$f(u,\upsilon,t)=f_0(\rho_1(u,t,0),\rho_2(\upsilon,t,0))\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,0)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,0)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)+$$
$$+\int_0^t\exp\left(-\int_{\rho_1(u,t,s)}^{u}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon,t,s)}^{\upsilon}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)b(s)F(\rho_1(u,t,s),\rho_2(\upsilon,t,s),s)ds\equiv(H[b])(u,\upsilon,t). \tag{10}$$

Подставляя в (10) $u=u^0,\upsilon=\upsilon^0$, получим

$$\psi(t)=f_0\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right),\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,0)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,0)}^{\upsilon^0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)+$$
$$+\int_0^t\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,s)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,s)}^{\upsilon^0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)b(s)F\left(\rho_1\left(u^0,t,s\right),\rho_2\left(\upsilon^0,t,s\right),s\right)ds. \tag{11}$$

Так как $\psi(t)\in C^1(R_+)$, то, дифференцируя (11) по t, имеем

$$F\left(u^0,\upsilon^0,t\right)b(t)=\psi'(t)-\psi_1(t)-\int_0^t K(t,s)b(s)ds, \tag{12}$$

где

$$\psi_1(t)=\left(f'_{0u}\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right),\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)\rho'_{1t}\left(u^0,t,0\right)+f'_{0\upsilon}\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right),\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)\rho'_{2t}\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,0)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,o)}^{\upsilon^0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)+$$
$$+f_0\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right),\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,0)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,0)}^{\upsilon_0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\lambda_1\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right)\right)}{a\left(\rho_1\left(u^0,t,0\right)\right)}\rho'_{1t}\left(u^0,t,0\right)+\frac{\lambda_2\left(\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)}{b\left(\rho_2\left(\upsilon^0,t,0\right)\right)}\rho'_{2t}\left(\upsilon^0,t,0\right)\right),$$

$$K(t,s)=\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,0)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,0)}^{\upsilon^0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left(\frac{\lambda_1(\rho_1)}{a(\rho_1)}\rho'_{1t}+\frac{\lambda_2(\rho_2)}{b(\rho_2)}\right)F(\rho_1,\rho_2,s)+$$
$$+\exp\left(-\int_{\rho_1(u^0,t,0)}^{u^0}\frac{\lambda_1(\xi)d\xi}{a(\xi)}-\int_{\rho_2(\upsilon^0,t,0)}^{\upsilon^0}\frac{\lambda_2(\eta)d\eta}{b(\eta)}\right)\left(F'_u(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{1t}+F'_\upsilon(\rho_1,\rho_2,s)\rho'_{2t}\right).$$

Таким образом, для решения обратной задачи (1) – (4) мы получили систему уравнений (10) , (12). При этом оба этих уравнения представляют собой относительно $f(u,\upsilon,t)$ и $b(t)$ интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода, если

$$F\left(u^0,\upsilon^0,t\right)\neq 0 \text{ для } \forall t\in R_+: \tag{13}$$

$$\begin{cases} f(u,\upsilon,t)=(H[b])(u,\upsilon,t), \\ b(t)=(H_0[b])(t),\ (u,\upsilon)\in R^2,\ t\in R_+, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$H_0[b] \equiv \left(F\left(u^0, \upsilon^0, t\right)\right)^{-1}\left\{\ \psi'(t) - \psi_1(t) - \int_0^t K(t,s)b(s)ds\right\}.$$

Если

$$\max(\gamma_5;\gamma_4\gamma_5) = d < 1, \tag{15}$$

где

$$1)\ \sup_{\Omega}\int_0^t \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\int_{\rho_i(x_i,t,s)}^{x_i}\frac{h(x')}{a(x')}dx'\right)\left|F\left(\rho_1(x_1,t,s),...,\rho_n(x_n,t,s),s\right)\right|ds \le \gamma_4 = const,$$

$$2)\ L_{H_0} = \left\|K_0^{-1}\right\|\sup_{R_+}\int_0^t\left|K'_{0t}(t,s)\right|ds \le \gamma_5,$$

то система (14) разрешима в $\left(C^{1,1,1}(\Omega);C(R_+)\right)$, причем последовательности $\{f_{n+1}\}$, $\{b_{n+1}\}$ строятся по правилу Пикара:

$$\begin{cases} f_{n+1} = (\ H[b_n]\ ) \\ b_{n+1} = (\ H_0[b_n]\ )(n = 0,1,...), \end{cases} \tag{16}$$

f_0, b_0 - начальные приближения, с оценкой погрешности

$$\|f_{n+1} - f\| \le d^{n+1}E_0 \xrightarrow[n\to\infty(d<1)]{} 0,\quad \|b_{n+1} - b\| \le d^{n+1}E_0 \xrightarrow[n\to\infty(d<1)]{} 0,\quad E_0 = \|b - b_0\|.$$

Таким образом, доказана

Теорема. При условиях (13), (15) обратная задача разрешима в классе функций $\left(C^{1,1,1}(\Omega);C(R_+)\right)$.

Литература:

1. Т. Д. Омуров, М. М. Туганбаев. Интегральное преобразование линейного интегро-дифференциального уравнения типа Больцмана // Наука и новые технологии.-Бишкек, 2006, № 3-4, - С.8-12.
2. Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana, Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams //Journal Math. Phys., - 1989, - Vol. 30. - No. 5,- P.1177-1186.
3. G. Gavalleri and S. L. Paveri-Fontana //Phys. Rev. A 6. 327, - 1972.
4. V. V. Parail and O. P. Pogutse, Runaway electrons in a plasma
5. // Reviews of Plasma Physics, edited by M. A. Leontovich. Consultans Bureau. New York, - 1986, - Vol. 11.
6. M. C. Mackey // Biophys. J. 11, 75, - 1971.
7. A. Majorana, Space homogeneous solutions of the Boltzmann equation describing electron-phonon interactions in semiconductors // Transport Theory Statist. Phys. – 1991, - 20, p.261-279.