МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА

Шаназаров Д.Г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ОСНОВНОМ СЛУЧАЕ

Shanazarov D.G.

TO THE RESEARCH OF ASYMPTOTICAL PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF REGULAR SYSTEMS WITH LIMITATIONS IN THE BASIC CASE.

УДК: 517.938

Исследуются асимптотические свойства решений нелинейных регулируемых систем с ограничениями в основном случае. На основе оценки несобственных интегралов на множестве решений динамической системы получен критерий абсолютной устойчивости.

The asymptotical properties of the solutions of nonlinear regular systems with limitations in the basic case are regarded. The new method of defining the domain of absolute stability of dynamic system has been developed on the base of evaluation of improper integrals on the solution set of the given dynamic system.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения регулируемой системы вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \sigma = Sx,\ x(0) = x_0,\ t \in I = [0,\infty), \tag{1}$$

где $A,\ B,\ S$ – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева.

Функция $\varphi(\sigma)$ является элементом следующего множества Φ_1

$$\Phi_1 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1),...,\varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m),\ 0 \le \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i < \mu_{0i}\sigma_i^2, \tag{2}$$

$$\forall \sigma_i \in R^1,\ i = \overline{1,m};\ \varphi(0) = 0 \,/\, |\varphi_i(\sigma_i)| \le \varphi_i^*,\ \varphi_i^* = const > 0,\ 0 < \varphi_i^* < \infty,\ i = \overline{1,m}\}$$

Положение равновесия системы (1) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Так как матрица A гурвицева, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = -SA^{-1}B\varphi(\sigma_*)$. Отсюда следует, что если матрица $-SA^{-1}B$ не особая, то система (1) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0,\ \sigma_* = 0$), для любых $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$.

Определение 1. Говорят, что тривиальное решение $x_* = 0$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если матрицы A, $A + B\mu S$, $0 \le \mu \le \bar{\mu}_0$ гурвицевы, где $\mu = diag(\mu_1,...,\mu_m)$, $\bar{\mu}_0 = diag(\bar{\mu}_{01},...,\bar{\mu}_{0m})$, $0 \le \mu_i \le \bar{\mu}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$ предел $\lim_{t\to\infty} x(t;0,x_0,\varphi) = 0$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Определение 2. Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называются алгебраические или другие соотношения, связывающие матрицы (A, B, S, μ_0), $\mu_0 = diag(\mu_{01},...,\mu_{0m})$, $\mu_{0i} \le \bar{\mu}_{0i}$, $i = \overline{1,m}$, при выполнении которых тривиальное решение $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Предлагается метод решения следующей задачи: найти критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2);

Основные леммы

Лемма 1. *Пусть матрица* SB *порядка* $m \times m$ *не особая. Тогда вдоль решения системы (1), (2) верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = (SB)^{-1}\omega(t) - (SB)^{-1}SAx(t),\ \omega(t) = \dot{\sigma}(t),\ t \in I, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = \left[A - B(SB)^{-1}SA\right]x(t) + B(SB)^{-1}\omega(t),\ t \in I, \tag{4}$$

Подробное доказательство леммы 1 приведено в [1].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1, и, кроме того, матрицы* $\tau_1 = diag(\tau_{11}, \tau_{12}, ..., \tau_{1m})$, $\tau_2 = diag(\tau_{21}, \tau_{22}, ..., \tau_{2m})$ *такие, что*

$$\tau_2 = \begin{cases} 0, & если\ \ \tau_1 \le 0, \\ \mu_0\tau_1, & если\ \ \tau_2 > 0, \end{cases} \qquad \bar{\varphi}(\sigma) = \begin{cases} \varphi(\sigma), & если\ \ \tau_1 \le 0, \\ \varphi(\sigma) - \mu_0\sigma, & если\ \ \tau_1 > 0, \end{cases}$$

$$\ell_0 = \begin{cases} -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi^*(\sigma)\tau_1 d\sigma = -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\sigma_i(0)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i,\ \ если\ \ \tau_1 \le 0, \\ -\int\limits_0^{\sigma(0)} \left[\varphi(\sigma) - \mu_0\sigma\right]^*\tau_1 d\sigma = -\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^{\sigma_i(0)} \left[\varphi_i(\sigma_i) - \mu_{0i}\sigma_i\right]\tau_{1i}d\sigma_i,\ \ если\ \ \tau_1 > 0, \end{cases}$$

где (*) – знак транспонирования.
Тогда, вдоль решения системы (1), (2) верно равенство

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\omega^*(t)M_1\omega(t) + \omega^*(t)M_2x(t)\right]dt = \\ &= \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma + \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sigma^*(T)\tau_2\sigma(T) - \frac{1}{2}\sigma_0^*\tau_2\sigma_0, \end{aligned} \tag{5}$$

где матрицы $M_1 = (SB)^{*-1}\tau_1$, $M_2 = -\tau_1(SB)^{-1}SA$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, матрицы* $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$ *порядков* $n \times n$ *такие, что*

$$B^*H_1 = \Gamma_0 S,\ B^*H_2 = \Gamma_1 SA,\ ...,\ B^*H_n = \Gamma_{n-1}SA^{n-1}, \tag{6}$$

где Γ_0, Γ_1, ..., Γ_{n-1} *– матрицы порядков* $m \times m$.

Тогда для любых симметричных матриц $H_0 = H_0^*$, $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$ *порядков* $n \times n$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\omega^*(t)N_2x(t) + x^*(t)N_3x(t)\right]dt = \\ &= -\lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[H_0 + H_1 + ... + H_n\right]x(T) + x_0^*\left[H_0 + H_1 + ... + H_n\right]x_0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$N_2 = -2(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + ... + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right), \tag{8}$$

$$N_3 = -2A^*\left(H_0 + H_1 + ... + H_n\right) + 2A^*S^*(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0 S + ... + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right). \tag{9}$$

Доказательство леммы 3 основывается на свойствах симметричных матриц $H_0 = H_0^*$ и $H_i = H_i^*$, $i = \overline{1,n}$. Со схемой доказательства леммы 3 можно познакомиться в [3] (лемма 4)

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 1, и, пусть, кроме того, существует матрица* θ *порядка* $m \times n$, *такая, что* $\theta B = 0$. *Тогда для любых симметричных матриц* $K = K^*$, $K_1 = K_1^*$ *порядков* $m \times m$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\omega^*(t)N_4x(t) + x^*(t)N_5x(t)\right]dt =$$

$$= -\lim_{T\to\infty} x^*(T)\left[\theta^* K\theta + A^*\theta^* K_1\theta A\right]x(T) + x_0^*\left[\theta^* K\theta + A^*\theta^* K_1\theta A\right]x_0, \quad (10)$$

$$N_4 = -2(SB)^{*-1} B^* A^* \theta^* K_1 \theta A, \quad (11)$$

$$N_5 = -2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + 2A^* S^*(SB)^{*-1} B^* A^*\theta^* K_1\theta A. \quad (12)$$

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1, то верны тождества (3), (4). Умножая тождества (4) слева на θ, с учетом того, что $\theta B = 0$, получим

$$\theta\dot{x}(t) = \theta A x(t) - \theta B(SB)^{-1} SAx(t) + \theta B(SB)^{-1}\omega(t) = \theta A x(t), \quad t \in I \quad (13)$$

Для любой симметричной матрицы $K = K^*$ порядка $m \times m$ верны равенства

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \dot{x}^*(t)\theta^* K\theta x(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)\theta^* K\theta x(T) + x_0^*\theta^* K\theta x_0, \quad (14)$$

$$-2\dot{x}^*(t)\theta^* K\theta x(t) = -2x^*(t)A^*\theta^* K\theta x(t), \quad t \in I. \quad (15)$$

Как следует из тождества (13) верно соотношение

$$\theta\ddot{x}(t) = \theta A\dot{x}(t) = \theta A^2 x(t) - \theta AB(SB)^{-1} SAx(t) + \theta AB(SB)^{-1}\omega(t), \quad t \in I \quad (16)$$

Для любой симметричной матрицы $K_1 = K_1^*$ порядка $m \times m$ верно равенство

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \ddot{x}^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t)dt = -\lim_{T\to\infty}\dot{x}^*(T)\theta^* K_1\theta\dot{x}(T) + \dot{x}_0^*\theta^* K_1\theta\dot{x}_0. \quad (17)$$

Заметим, что $\theta\dot{x}(t) = \theta A x(t)$, $t \in I$, $\theta\dot{x}_0 = \theta A x_0$. Теперь равенство (17), с учетом тождества (16) запишется в виде

$$-2\lim_{T\to\infty}\int_0^T \ddot{x}^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t)dt = -\lim_{T\to\infty} x^*(T)A^*\theta^* K_1\theta A x(T) + x_0^* A^*\theta^* K_1\theta A x_0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}-2\ddot{x}^*(t)\theta^* K_1\theta\dot{x}(t) &= -2\left[\theta A^2 x(t) - \theta AB(SB)^{-1} SAx(t) + \theta AB(SB)^{-1}\omega(t)\right]^* K_1\theta A x(t) = \\ &= -2\omega^*(t)(SB)^{*-1} B^* A^*\theta^* K_1\theta A x(t) + x^*(t)\left[-2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + \right.\\ &\quad \left. + 2A^* S^*(SB)^{*-1} B^* A^*\theta^* K_1\theta A\right]x(t). \quad t \in I\end{aligned} \quad (19)$$

Суммируя (14), (18), с учетом (15), (19), получим (10). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия лемм 1–4. Тогда для любых симметричных матриц $W_0 = W_0^* \geq 0$, $W_1 = W_1^* \geq 0$ порядков $m \times m$, $n \times n$ соответственно, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\omega^*(t)R_1\omega(t) + \omega^*(t)R_2 x(t) + x^*(t)R_3 x(t)\right]dt \leq$$

$$\leq \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0 \quad (20)$$

$$\Pi_0 = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i - \frac{1}{2}S^*\tau_2 S + \theta^* K\theta + A^*\theta^* K_1\theta A, \quad (21)$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(SB)^{*-1}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1(SB)^{-1} - W_0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}R_2 = -2(SB)^{*-1}&\left(B^* H_0 + \Gamma_0 S + \Gamma_1 SA + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) - \tau_1(SB)^{-1} SA - \\ &- 2(SB)^{*-1} B^* A^*\theta^* K_1\theta A,\end{aligned} \quad (23)$$

$$R_3 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i\right) + 2A^* S^*(SB)^{*-1}\left(B^* H_0 + \Gamma_0 S + \ldots + \Gamma_{n-1} SA^{n-1}\right) -$$

$$- 2A^*\theta^* K\theta - 2A^{*2}\theta^* K_1\theta A + 2A^* S^*(SB)^{*-1} B^* A^* \theta^* K_1 \theta A - W_1 . \quad (24)$$

Доказательство леммы строится на суммировании несобственных интегралов (5), (7), (10).

Лемма 6. *Пусть выполнены условия леммы 1, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой диагональной матрицы* $P = P^* > 0$ *порядка* $m \times m$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\omega^*(t)T_1\omega(t) + \omega^*(t)T_2x(t) + x^*(t)T_3x(t)\right]dt, \quad (25)$$

$$T_1 = -(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1},$$
$$T_2 = (SB)^{*-1}PS + 2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA,$$
$$T_3 = -A^*S^*(SB)^{*-1}PS - A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA. \quad (26)$$

Доказательство леммы 6 следует из свойств включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, аналогично лемме 3 из [2].

Лемма 7. *Пусть выполнены условия лемм 5,6, и пусть, кроме того*

$$\mu_0 = \left[(SB)^*W_0(SB) - \frac{1}{2}\tau_1(SB) - \frac{1}{2}(SB)^*\tau_1\right]^{-1} P, \quad (27)$$

$$2(SB)^{*-1}B^*H_0 = \left[-(SB)^{*-1}P - 2(SB)^{*-1}\Gamma_0\right]S + \left[(SB)^{*-1}\tau_1 - 2W_0 - 2(SB)^{*-1}\Gamma_1\right]SA -$$
$$- 2(SB)^{*-1}\left(\Gamma_2SA^2 + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right) - 2(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A, \quad (28)$$

$$0 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i\right) - A^*S^*W_0SA - W_1 - 2A^*\theta^*K\theta - 2A^{*2}\theta^*K_1\theta A. \quad (29)$$

Тогда, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi^*(\sigma(t))P\left[\sigma(t) - \mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right]dt \le \ell_0 +$$

$$+ \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0x(T) + x_0^*\Pi_0x_0. \quad (30)$$

Доказательство леммы 7 следует из равенства несобственных интегралов I_4 и I_5.

Лемма 8. *Пусть выполнены условия лемм 1–5. Тогда, для любой матрицы* $P = P^* \ge 0$ *порядка* $m \times m$, *вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка несобственного интеграла*

$$I_6 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left\{\omega^*(t)Q_1\omega(t) + \omega^*(t)Q_2x(t) + x^*(t)Q_3x(t)\right\}dt \le$$

$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \bar{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0x(T) + x_0^*\Pi_0x_0 \quad (31)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2}(SB)^{*-1}\tau_1 + \frac{1}{2}\tau_1(SB)^{-1} - W_0 + (SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}, \quad (32)$$

$$Q_2 = -2(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0S + \Gamma_1SA + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right) - \tau_1(SB)^{-1}SA -$$
$$- 2(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A - (SB)^{*-1}PS - 2(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA, \quad (33)$$

$$Q_3 = -2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i\right) + 2A^*S^*(SB)^{*-1}\left(B^*H_0 + \Gamma_0S + \Gamma_1SA + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}\right) -$$
$$- 2A^*\theta^*K\theta - 2A^{*2}\theta^*K_1\theta A + 2A^*S^*(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A - W_1 +$$
$$+ A^*S^*(SB)^{*-1}PS + A^*S^*(SB)^{*-1}P\mu_0^{-1}(SB)^{-1}SA. \quad (34)$$

Лемма 8 доказывается путем разности несобственных интегралов I_4, I_5

Лемма 9. *Пусть выполнены условия леммы 1, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда, для любых* *матриц* Σ, W, $P_1 = P_1^* > 0$ *порядков* $m \times m$, *вдоль решения системы (1), (2) верно равенство*

$$0 \le I_7 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))]^* P_1 [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\omega^*(t)E_1\omega(t) + \omega^*(t)E_2x(t) + x^*(t)E_3x(t)]dt, \qquad (35)$$

$$E_1 = [I_m + W(SB)^{-1}]^* P_1 [I_m + W(SB)^{-1}], \qquad (36)$$

$$E_2 = 2[I_m + W(SB)^{-1}]^* P_1 [\Sigma S - W(SB)^{-1}SA], \qquad (37)$$

$$E_3 = [\Sigma S - W(SB)^{-1}SA]^* P_1 [\Sigma S - W(SB)^{-1}SA]. \qquad (38)$$

Доказательство. Как следует из леммы 1, сумма

$$\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t)) = [I_m + W(SB)^{-1}]\omega(t) + [\Sigma S - W(SB)^{-1}SA]x(t),\ t \in I.$$

Тогда

$$0 \le [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))]^* P_1 [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))] =$$

$$= [\omega^*(t)E_1\omega(t) + \omega^*(t)E_2x(t) + x^*(t)E_3x(t)],\ t \in I,$$

где матрицы E_1, E_2, E_3 определяются формулами (36)–(38) соответственно. Интегрируя данное тождество, получим равенство (35). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть выполнены условия лемм 8,9, и пусть, кроме того*

$$\mu_0 = \left[(SB)^* W_0 (SB) - \frac{1}{2}\tau_1(SB) - \frac{1}{2}(SB)^*\tau_1 + (W + SB)^* P_1 (W + SB)\right]^{-1} P, \qquad (39)$$

$$\begin{aligned}2(SB)^{*-1}B^*H_0 = &[-(SB)^{*-1}P - 2(SB)^{*-1}\Gamma_0 - 2P_1\Sigma - 2(SB)^{*-1}W^*P_1\Sigma]S +\\ &+[(SB)^{*-1}\tau_1 - 2W_0 - 2(SB)^{*-1}\Gamma_1 - 2P_1 - 2(SB)^{*-1}W^*P_1]SA -\\ &- 2(SB)^{*-1}(\Gamma_2SA^2 + \ldots + \Gamma_{n-1}SA^{n-1}) - 2(SB)^{*-1}B^*A^*\theta^*K_1\theta A,\end{aligned} \qquad (40)$$

$$\begin{aligned}0 = &-2A^*\left(H_0 + \sum_{i=1}^n H_i\right) - S^*\Sigma^*P_1\Sigma S - 2A^*S^*P_1\Sigma S +\\ &+ A^*S^*(-W_0 - P_1)SA - 2A^*\theta^*K\theta - 2A^{*2}\theta^*K_1\theta A - W_1.\end{aligned} \qquad (41)$$

Тогда, вдоль решения системы (1), (2) справедлива следующая оценка

$$0 \le I_7 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))]^* P_1 [\dot\sigma(t) + \Sigma\sigma(t) + W\varphi(\sigma(t))]dt \le$$

$$\le \ell_0 + \lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma - \lim_{T\to\infty} x^*(T)\Pi_0 x(T) + x_0^*\Pi_0 x_0. \qquad (42)$$

Доказательство леммы 10 следует из равносильности $Q_i = E_i$, $i = 1,2,3$ и равенства интегралов I_6 и I_7.

Лемма 11. *Если матрица A – гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, *то верны оценки*

$$|x(t)| \le c_0,\ |\dot x(t)| \le c_1,\ |\sigma(t)| \le c_2,\ |\dot\sigma(t)| \le c_3\ \forall t,\ t \in I, \qquad (43)$$

где $c_i = const > 0$, $i = \overline{0,3}$, *функции* $x(t), \sigma(t), t \in I$ *- равномерно непрерывны.*

Подробное доказательство леммы 11 приведено в [1] (лемма 9).

Лемма 12. *Пусть матрица A – гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_1$, *вдоль решения системы (1), (2)* *предел* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$. *Тогда* $x(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$ следует, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(\sigma)=k(\sigma)\sigma$, $0\le k(\sigma)\le\mu_0$. Поскольку, $\varphi(\sigma)\in C(R^m,R^m)$, то вдоль решения системы (1), (2) предел $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$, $k(0)=0$. Теперь уравнение (1) запишется следующим образом

$$\dot{x}=Ax+Bk(\sigma(t))Sx(t),\ x(0)=x_0,\ t\in I=[0,\infty), \tag{44}$$

где $\lim\limits_{t\to\infty}k(\sigma(t))=0$, $k(\sigma(t))$, $t\in I$ – непрерывная функция.

Решение дифференциального уравнения (44) имеет вид

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bk(\tau)Sx(\tau)d\tau,\ t\in I,\ \text{где}\ \left\|e^{At}\right\|\le ce^{(\alpha+\varepsilon)t},\ t\in I.$$

Тогда $|x(t)|=ce^{(\alpha+\varepsilon)t}|x_0|+\int_0^t ce^{(\alpha+\varepsilon)(t-\tau)}\|Bk(\tau)S\||x(\tau)|d\tau$, $t\in I$. Умножая данное неравенство на $e^{-(\alpha+\varepsilon)t}$, получим

$$e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)|\le c|x_0|+\int_0^t c\|Bk(\tau)S\|e^{-(\alpha+\varepsilon)\tau}|x(\tau)|d\tau,\ t\in I. \tag{45}$$

Пусть функция $u(t)=e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)|$, $t\in I$. Заметим, что $u(t)\ge 0$, $t\in I$, $u(t)\in C(I,R^1)$. Теперь, неравенство (45) запишется в виде

$$u(t)\le c|x_0|+\int_0^t c\|Bk(\tau)S\|u(t)d\tau,\ t\in I, \tag{46}$$

где $\|Bk(t)S\|\in C(I,R^1)$. Применив к неравенству (46) метод Грануолла – Беллмана, получим

$$u(t)\le c|x_0|e^{c\int_0^t\|Bk(\tau)S\|d\tau},\ t\in I.$$

Следовательно, $e^{-(\alpha+\varepsilon)t}|x(t)|\le c|x_0|e^{c\int_0^t\|Bk(\tau)S\|d\tau}$, $t\in I$. Тогда

$$|x(t)|\le c|x_0|e^{(\alpha+\varepsilon)t}e^{c\int_0^t\|Bk(\tau)S\|d\tau},\ t\in I. \tag{47}$$

Пусть, функция $f(t)=\int_0^t\|Bk(\tau)S\|d\tau$. Отметим, что согласно обобщению правила Лопиталя, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\|Bk(t)S\|}{1}=0$. Отсюда следует, что $f(t)=\int_0^t\|Bk(\tau)S\|d\tau\le\varepsilon_1 t$ при $t>T$, где $T>0$ – достаточно большое число, $\varepsilon_1>0$ – достаточно малое число, такое, что $\varepsilon=c\varepsilon_1$. Теперь оценка (47) запишется так $|x(t)|\le c|x_0|e^{(\alpha+2\varepsilon)t}$, при $t>T$, $t\in I$. Тогда $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть матрица A – гурвицева, функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$, *и пусть, кроме того, непрерывная функция* $V(\sigma)>0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in R^m$, $V(0)=0$ *и, вдоль решения системы (1), (2) предел*

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt<\infty. \tag{48}$$

Тогда $\sigma(t)\to 0$ *при* $t\to\infty$.

Лемма 13 доказывается методом «от противного».

Критерий абсолютной устойчивости

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Матрицы А,* $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
2) *Матрицы* SB, $SA^{-1}B$ *не особые;*
3) *Матрицы* H_0, H_i, $i=\overline{1,n}$, Γ_i, $i=\overline{0,n-1}$, θ, $P>0$, $W_0\ge0$, $W_1\ge0$, K, K_1, τ_1 *такие, что*
   $\theta B=0$, $B^*H_i=\Gamma_{i-1}SA^{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ *и выполнены равенства (27)–(29);*
4) *Непрерывная функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Так как функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$ – ограничены, то

$$0\le I_5=\lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt\le\ell_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1d\sigma-$$
$$-\lim_{T\to\infty}x^*(T)\Pi_0x(T)+x_0^*\Pi_0x_0<\infty. \qquad (49)$$

Независимо от знака матрицы Π_0, $|\sigma(T)|<\infty$, $|x(T)|<\infty$, $\forall T$. Следовательно, решение системы (1), (2) ограниченно, т.е. $|x(t)|\le c_0$, $\forall t$, $t\in I=[0,\infty)$. Тогда $|\sigma(t)|\le\|S\||x(t)|\le c_2$, $\forall t$, $t\in I$, $|\varphi(\sigma(t))|\le\varphi_*$, $t\in I$, в силу ограниченности $\sigma(t)$, $t\in I$ и непрерывности функции $\varphi(\sigma)$, $\sigma\in R^m$. Поскольку, $\dot{x}(t)=Ax(t)+B\varphi(\sigma(t))$, $\dot{\sigma}(t)=S\dot{x}(t)$, то $|\dot{\sigma}(t)|\le\|S\||\dot{x}(t)|\le c_3$, $|\dot{x}(t)|\le\|A\||x(t)|+\|B\||\varphi(\sigma(t))|\le c_1$, $t\in I$. Следовательно, функции $x(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$ – равномерно непрерывны.

Из ограниченности $x(t)$, $t\in I$ следует, что оценка (49) запишется в виде

$$0\le\lim_{T\to\infty}\int_0^T V(\sigma(t))dt<\infty, \qquad (50)$$

где $V(\sigma)>0$, $\forall\sigma$, $\sigma\in R^m$ – непрерывная функция, $V(0)=0$; $\sigma(t)$, $t\in I$ – равномерно непрерывная функция. Тогда $\sigma(t)\to0$ при $t\to\infty$. Так как $\varphi(0)=0$, то $\lim_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$. Поскольку A – гурвицева, матрица $\varphi(\sigma(t))\to0$ при $t\to\infty$, то выполнены условия леммы 12. Тогда $x(t)\to0$ при $t\to\infty$. Так как *А,* $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ – гурвицевы, $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\varphi)=0$, $\forall\varphi$, $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$, $\forall x_0$, $|x_0|<\infty$, то положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Матрицы А,* $A+B\mu S$, $0\le\mu\le\overline{\mu}_0$, $\mu_0\le\overline{\mu}_0$ *– гурвицевы;*
2) *Матрицы* SB, $SA^{-1}B$ *не особые;*
3) *Матрицы* H_0, H_i, $i=\overline{1,n}$, Γ_i, $i=\overline{0,n-1}$, θ, $P\ge0$, $P_1>0$, $W_0\ge0$, $W_1\ge0$, K, K_1, τ_1, Σ, W *такие, что*
   $\theta B=0$, $B^*H_i=\Gamma_{i-1}SA^{i-1}$, $i=\overline{1,n}$,
   и выполнены равенства (39)–(41)
4) *Равномерно непрерывная функция* $\varphi(\sigma)\in\Phi_1$;
5) *Положение равновесия системы* $\dot{\eta}+\Sigma\eta+W\varphi(\eta)=0$, $\varphi(\eta)\in\Phi_1$ *абсолютно устойчиво.*

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Поскольку выполнены условия леммы 10, то верна оценка (42). Пусть функция $f(t)=\dot{\sigma}(t)+\Sigma\sigma(t)+W\varphi(\sigma(t))$, $t\in I$.

Из оценки (42) имеем

$$0\le I_7=\lim_{T\to\infty}\int_0^T f^*(t)P_1 f(t)dt\le \ell_0+\lim_{T\to\infty}\int_0^{\sigma(T)}\overline{\varphi}^*(\sigma)\tau_1 d\sigma-$$

$$-\lim_{T\to\infty}x^*(T)\Pi_0 x(T)+x_0^*\Pi_0 x_0. \qquad (51)$$

Аналогично доказательству теоремы 1, можно показать, что решение системы (1), (2) ограничено. Из ограниченности решения следуют равномерные непрерывности функций $x(t)$, $\sigma(t)$, $t\in I$. Тогда функция $\dot{\sigma}(t)=SAx(t)+(SB)\varphi(\sigma(t))$, $t\in I$, также является равномерно непрерывной.

Поскольку $f(t)=\dot{\sigma}(t)+\Sigma\sigma(t)+W\varphi(\sigma(t))$, $t\in I$, то $f(t)$, $t\in I$ – равномерно непрерывна и из оценки (51) имеем

$$0\le I_7=\lim_{T\to\infty}\int_0^T f^*(t)P_1 f(t)dt<\infty,\ P_1=P_1^*>0.$$

Далее, применяя лемму 13, получим $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$. Следовательно, $\lim_{t\to\infty}\left[\dot{\sigma}(t)+\Sigma\sigma(t)+W\varphi(\sigma(t))\right]=0$. Отсюда следует, что функция $\sigma(t)$ при $t\to\infty$ стремится к решению дифференциального уравнения $\dot{\eta}+\Sigma\eta+W\varphi(\eta)=0$, $\varphi(\eta)\in\Phi_1$. По условию теоремы $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=0$. Тогда $\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\lim_{t\to\infty}\eta(t)=0$. Далее, повторяя доказательство теоремы 1, можно показать, что $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\varphi)=0$, $\forall\varphi$, $\varphi\in\Phi_1$. Из условия 1) теоремы и доказанного следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Литература:

1. Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г. Асимптотические свойства решений регулируемых систем с ограничениями в основном случае // Журнал «Поиск». Серия естественно-технических наук. – 2007. – №3. – С. 201-209.
2. Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г. К абсолютной устойчивости регулируе-мых систем в основном случае // Известия НАН РК. – 2007. – №3(253). – С. 38-42.
3. Айсагалиев С.А., Шаназаров Д.Г. Асимптотические свойства решений регулируемых систем в основном случае // Вестник КазНУ. – 2007. –№2(53). – С. 100-109.