*Макеев А.К.*

# БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ТҮРДҮҮ МЕТОДДОР МЕНЕН ЧЫГАРУУДАГЫ ӨЗГӨЧӨЛҮКТӨР

*Макеева А.К.*

# ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Изделген функцияга жана анын туундусуна карата сызыктуу болгон дифференциалдык теңдемелерди сызыктуу теңдемелер деп аташат. Биринчи тартиптеги сызыктуу дифференциалдык теңдеме $y' + p(x)y = f(x)$ (1) түрүндө болот. Эгерде (1) теңдемеде f(x)ө0 болсо бир тектүү теңдеме деп, ал эми $f(x) \neq 0$ болсо бир тектүү эмес сызыктуу теңдеме деп аталат. Сызыктуу бир тектүү теңдемени чыгарууда өзгөрмөлөрдү ажыратуу ыкмасы колдонулат. $y' + p(x)y = 0$ (2) деп алып анын өзгөрмөлөрүн ажыратып $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ ти интегралдап $y = ce^{\int -p(x)dx}$, $c \neq 0$ болгондогу жалпы чыгарылышына ээ болобуз. Эми жогорудагы (1) бир тектүү эмес теңдемени чыгарабыз. Бул теңдемени «турактуу чоңдукту вариациялоо методу» деп аталган метод менен чыгарабыз. Бул метод кээ бир учурда Лагранждын методу деп аталып да жүрөт. Бул методу колдонууда эң мурда (1) бир тектүү эмес теңдемеге туура келүүчү (2) бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз. Ал чыгарылыш $y = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ (3) болот. Мындагы *C* турактуу чоңдугун *x* тен көз каранды болгон: $C = C(x)$ функция деп эсептеп $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ функциясын x боюнча дифференциялап туруп, y тин өзүнүн жана анын туундусунун маанилерин (1) теңдемеге коебуз. $C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x)$ ке ээ болобуз. Мында топтоштуруудан кийин $C'(x)e^{-\int P(x)dx} = f(x)$ теңдемеси келип чыгат. Бул теңдемени C жана x ке карата өзгөрүлмөлөрүн ажыратып $C(x) = \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$ экендигин табабыз. Бул маанини (3) койсок (1) бир тектүү эмес теңдеменин төмөнкүдөй жалпы чыгарылышына ээ болобуз.

$y = C_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$ же $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right]$ (4) түрүндө жазсак болот.

Эми жогорудагы (1) теңдемени дагы бир метод менен карайлы. Ал метод Бернуллинин методу деп аталат. (1) теңдемедеги *y* ти $y = u\vartheta$ түрүндө издейбиз. Мында u жана $\vartheta$ лар хтен көз каранды болгон белгисиз функциялар. Эми биринчи теңдемени $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ (5) түрүндө жазып $y = u \cdot \vartheta$ ны жана $dy = ud\vartheta + \vartheta du$ (5)ге койсок $ud\vartheta + \vartheta du + P(x)u\vartheta dx = f(x)dx$ теңдемесине ээ болобуз. Бул барабардыктын сол жагындагы экинчи, үчүнчү мүчөсүндөгү $\vartheta$ кашаанын сыртына чыгарып $ud\vartheta + \vartheta[du + P(x)udx] = f(x)dx$ (6) ээ болобуз. Эми мындай шарт коебуз: квадраттык кашаанын ичиндеги туюнтма нөлгө айлана тургандай болгон $u$ функциясын табуу талап кылынат (демек, азырынча $u(x)$ функциясы каалагандай функция катары негизделген). Анда $du + P(x)udx = 0$ теңдемесинин өзгөрмөлөрүн ажыратып $u = e^{-\int p(x)dx}$ чыгарылышына ээ болобуз. Бул жерде турактуу санды жокпус себеби $\frac{du}{u} = -P(x)dx$ дифференциалдык теңдемесинин кандайдыр бир нөлдөн айырмалуу болгон чыгарылышы боло алат. Табылган $u$ функциясын (6) теңдемеге коебуз. Бул учурда квадраттык кашаанын ичиндеги туюнтма нөлгө барабар болгондуктан $ud\vartheta = f(x)dx$ барабардыгына ээ болобуз $e^{-\int p(x)dx}d\vartheta = f(x)dx$ болот. Муну интегралдап

$\vartheta = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$. Эми $u$ жана $\vartheta$ маанилерин $y = u\cdot\vartheta$ аркылуу белгилеген функцияга койсок $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$изделүүчү жалпы чыгарылышты алабыз.

Эми жогоруда берилген (1) теңдемени кийинки метод менен карайлы. Ал Эйлердин методу деп аталат. Кээ бир учурда интегралдоочу көбөйтүүчү методу деп атап коюшат.

Сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык (1) теңдеменин эки жагын $e^{\int p(x)dx}$ интегралдоочу көбөйтүүчүсүнө көбөйтүп төмөнкүгө ээ болобуз. $y'e^{\int P(x)dx} + P(x)ye^{\int P(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$. Бул барабардыктын сол жагы $y\cdot e^{\int p(x)dx}$ туюнтмасынын туундусун берет, анда $\left[ye^{\int p(x)dx}\right]' = f(x)e^{\int p(x)dx}$ же

$\int d\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$ болот муну интегралдап $ye^{\int p(x)dx} = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$ алабыз, андан кийин у ти таап жалпы чыгарылышка ээ болобуз. $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$. Демек жогоруда каралган баардык методдордун жалпы чыгарылыштары бири-бири менен дал келишет.

Эми төмөндөгүдөй мисалды карайлы.

<u>Мисал:</u> $xy' - 2y = 2x^4$ дифференциалдык теңдемесин жогоруда каралган методдор менен чыгаруудагы өзгөчөлүктөрдү жана окшоштуктарды көрсөтөлү.

<u>1-метод. Лагранждын методу.</u>

Берилген теңдемени $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ түрүндө жазабыз, мында $p(x) = -\frac{2}{x}$ $f(x) = 2x^3$.

1) $\int P(x)dx = -\int \frac{2}{x}dx = -2\ln x$

2) а) $e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln|x|} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$

б) $e^{-\int P(x)dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$

3) $\int f(x)e^{\int p(x)dx} = \int 2x^3\frac{1}{x^2} = \int 2xdx = x^2 + c$

Эми $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$ формуласына коюп $y = x^2(x^2 + c)$ жалпы чыгарылышка ээ болобуз.

<u>2-метод. Турактууну вариациялоо методу</u>. Жогорудагы теңдемени кайрадан ушул жол менен чыгаралы. $xy' - 2y = 2x^4$ теңдемесин $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ түрүндө жазабыз. Мындан бир тектүү теңдемени чыгарабыз $y' - \frac{2}{x}y = 0$. $\ln y = \ln x^2 + \ln c$ ээ болобуз, бул барабардыкты потенцирлеп $y = x^2\cdot c$ чыгарылышка ээ болобуз. $c = c(x)$ деп $y = x^2c(x)$ ти дифференцирлеп $y' = 2xc(x) + x^2c'(x)$ ээ болобуз. Эми $y$ жана $y'$ маанилерин берилген теңдемеге коюп $c$ жана хке карата интегралдап $c(x) = x^2 + c_1$ алабыз. Бул маанини $y = x^2\cdot c$ коюп $y = x^2(x^2 + c_1)$ жалпы чыгарылышына ээ болобуз.

<u>3-метод. Бернуллинин методу.</u>

$xy' - 2y = 2x^4$ теңдемесиндеги $y$ ти $y = u\vartheta$ аркылуу белгилейли, анда $y' = u'\vartheta + u\vartheta'$ болот. Бул белгилөөлөрдү берилген теңдемеге койсок

$$xu'\vartheta + xu\vartheta' - 2u\vartheta = 2x^4$$

$$u(x\vartheta' - 2\vartheta) + xu\vartheta = 2x^4$$

$$x\vartheta' - 2\vartheta = 0$$

$$\vartheta = x^2$$

$$xu'x^2 = 2x^4$$

$$u = x^2 + c$$

Эми $u$ жана $\vartheta$ маанилерин $y = u\vartheta$ койсок $y = x^2(x^2 + c)$ болот.

4-метод. Эйлердин методу.

$xy' - 2y = 2x^4$ теңдемеси үчүн $\mu = e^{\int p(x)dx}$ интегралдоочу көбөйтүүчүсүн табабыз. Бул учурда $p = -\frac{2}{x}$, $f(x) = 2x^3$ болот. Демек $\mu = \frac{1}{x^2}$ болот. Берилген теңдемени $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ түрүндө жазып интегралдоочу көбөйтүүчүсүн көбөйткөндөн кийин $\frac{1}{x^2dy} - \frac{2}{x^3}ydx = 2xdx$ ээ болобуз. Барабардыктын сол жагы $\frac{y}{x^2}$ тын дифференциалын түзөт. Анда $d\left(\frac{y}{x^2}\right) = 2xdx$ муну интегралдап $y = x^2(x^2 + c)$ жалпы чыгарылышына ээ болобуз.

Демек, Эйлердин методу менен чыгаруудагы өзгөчөлүк бул жерде толук дифференциалды болуп алуу методу колдонулду. Бул метод менен чыгарууда

$$d(xy) = ydx + xdy$$
$$d(y^2) = 2ydy$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$
$$d(\ln y) = \frac{dy}{y}$$

ж.б.у.с формулаларды пайдалануу керек. Бернуллинин методун колдонууда изделүүчү функция эки белгисиз функциянын көбөйтүндүсү аркылуу белгиленди. Туруктууну вариациялоо методунда (Лагранж) жана Бернуллинин методунда өзгөрмөлөрү ажыроочу теңдемелер чыгарылган учурлар кездешти.

**Адабияттар:**

1. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики. Дифференциальные уравнения, краевые задачи, интегральные уравнения. Учебник для техникумов. М., «Высшая школа», 1974. 367с.
2. Саадабаев А. Дифференциалдык теңдемелердин курсу.- Толукталган 2-чи басылышы. Б., 2003 -210-б.
3. Усубакунов Р. Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр. «Мектеп» басмасы. Фрунзе. 1969.
4. Самойленко А.М, Кривошея С.А, Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учебное пособие. 2-е издание переработанное-М., «Высшая школа», 1989. 383с.