НАУКА И НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, № 1-2 2008

МАТЕМАТИКА. ТЕХНИКА. СЕЙСМОЛОГИЯ

Карасаев И.К.

ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

В статье рассматривается сведения уравнения Хилла к векторному уравнению бесконечномерном пространстве решений отыскание показателей Ляпунова, наталкиваются на большие трудности.

Переход от конечномерного пространетва к бесконечномерному впервые был осуществлен Хиллом в его исследованиях, посвяуенному изучению движения Луны вокруг Земли. В от личии от других исследоват елей уравнения Хилла, в статье успешно разработан новый подход к построению бесконечно линейных систем, позволяющих к установлению неограниченной устойчивост и данного уравнения.

Рассмотрим уравнение Хилла [1]

$$\ddot{x} + a(t)x = 0, \tag{1}$$

$a(t)$ -непрерывная функция и $a(t+2\pi) = a(t)$.

Решение, как известно, представимо в виде [2]

$$x(t) = e^{\mu t} y(t) = e^{\mu t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m e^{imt}, \tag{2}$$

$$a(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt}. \tag{3}$$

a_m -заданные постоянные, малые по сравнению с a_0, a_0 -среднее значение функции $a(t)$ в промежутке $[0,2\pi]$, допустим что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = d < 1 \tag{4}$$

и ряд

$$\ddot{x} = e^{\mu t} \sum_{q=-\infty}^{\infty} (\mu + iq)^k y_q e^{iqt}, \quad (k = 0,1,2,...) \tag{5}$$

сходится абсолютно в бесконечной полосе

$$G: \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \le \operatorname{Im}\mu \le \dfrac{1}{2}, \\ -\infty < \operatorname{Re}\mu < +\infty. \end{cases} \tag{6}$$

μ -комплексное число, называемое характеристическим показателем уравнения Хилла [3],

$$..., \quad y_{-2}, \quad y_{-1}, \quad y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad ...$$

пока неизвестные величины. Наложим на поведение μ условие

$$(\mu + ip)^2 - \alpha \ne 0, \qquad (p = 0,\pm1,\pm2,...), \tag{6'}$$

которое назовем условием поляризации характеристических показателей. Тогда следующие операции являются законными

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} (\mu + ip)^2 y_p e^{ipt} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt} \cdot \sum_{q=-\infty}^{\infty} y_q e^{iqt} = 0.$$

Перемножая и раскрывая последние суммы, имеем

$$\begin{aligned} &... + (... + a_{-p-q} y_q + a_{-p-(q-1)} y_{(q-1)} + ... + a_{-p-1} y_1 + a_{-p} y_0 + a_{-p+1} y_{-1} + ... + a_{-p+(q-1)} y_{-(q-1)} + \\ &+ a_{-p+q} y_{-q} + ...) e^{-ipt} + ... + (... + a_{-(p-1)-q} y_q + a_{-(p-1)-(q-1)} y_{q-1} + ... + a_{-(p-1)-1} y_1 + a_{-(p-1)} y_0 + \\ &+ a_{-(p-1)+1} y_{-1} + ... + a_{-(p-1)+(q-1)} y_{-(q-1)} + a_{-(p-1)+q} y_{-q} + ...) e^{-(p-1)it} + ... + (... + a_{-2-q} y_q + \\ &+ a_{-2-(q-1)} y_{q-1} + ... + a_{-2-1} y_1 + a_{-2} y_0 + a_{-2+1} y_{-1} + ... + a_{-2+(q-1)} y_{-(q-1)} + a_{-2+q} y_{-q} + ...) e^{-2it} + \\ &+ (... + a_{-1-q} y_q + a_{-1-(q-1)} y_{q-1} + ... + a_{-1-1} y_1 + a_{-1} y_0 + a_{-1+1} y_{-1} + ... + a_{-1+q} y_{-q} + ...) e^{-it} + \\ &+ \left(... + a_{0-q} y_q + a_{0-(q-1)} y_{q-1} + ... + a_{0-1} y_1 + a_0 y_0 + a_{0+1} y_{-1} + ... + a_{0+(q-1)} y_{-(q-1)} + a_{0+q} y_{-q} + ...\right) e^{0it} + \end{aligned}$$

$$+(\ldots+a_{1-q}y_q+a_{1-(q-1)}y_{q-1}+\ldots+a_{1-1}y_1+a_1y_0+a_{1+1}y_{-1}+\ldots+a_{1+(q-1)}y_{-(q-1)}+a_{1+q}y_{-q}+\ldots)e^{it}+$$
$$+(a_{2-q}y_q+a_{2-(q-1)}y_{q-1}+\ldots+a_{2-1}y_1+a_{2+0}y_0+a_{2+1}y_{-1}+\ldots+a_{2+(q-1)}y_{-(q-1)}+a_{2+q}y_{-q}+\ldots)e^{2it}+$$
$$+\ldots+(\ldots+a_{(p-1)-q}y_q+a_{(p-1)-(q-1)}y_{q-1}+\ldots+a_{-(p-1)-1}y_1+a_{-(p-1)}y_0+a_{-(p-1)+1}y_{-1}+a_{-(p-1)}y_0+$$
$$+\ldots+a_{-(p-1)+(q-1)}y_{-(q-1)}+a_{-(p-1)+q}y_{-q})e^{-(p-1)it}+(\ldots+a_{p-q}y_q+a_{p-(q-1)}y_{q-1}+\ldots+a_{p-1}y_1+a_py_0+$$
$$+a_{p+1}y_{-1}+\ldots+a_{p+(q-1)}y_{-(q-1)}+a_{p+q}y_{-q}+\ldots)e^{ipt}+\ldots=\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-p-q}y_q\right)e^{-ipt}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-(p-1)-q}y_q\right)e^{-i(p-1)t}+$$
$$+\ldots+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-2-q}y_q\right)e^{-2it}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-1-q}y_q\right)e^{-it}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{0-q}y_q\right)e^{0it}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{1-q}y_q\right)e^{it}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{2-q}y_q\right)e^{2it}+$$
$$+\ldots+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{(p-1)-q}y_q\right)e^{(p-1)it}+\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}y_q\right)e^{ipt}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}\right)e^{pit} \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_me^{imt}\sum_{q=-\infty}^{\infty}y_qe^{iqt}=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}e^{pit} \tag{8}$$

Тогда из (7) и (8) следует, что

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty}\left[(\mu+ip)^2y_p+\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}y_q\right]e^{ipt}=0,$$

где, приравнивая при каждом p нулю, имеем

$$\begin{cases}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\mu-ip)^2y_p+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}y_q=0, \\
(\mu-i(p-1))^2y_{p-1}+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-(p-1)-q}y_q=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\mu-2i)^2y_{-2}+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-2-q}y_q=0, \\
(\mu-i)^2y_{-1}+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{-1-q}y_q=0, \\
(\mu-0i)^2y_0+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{0-q}y_q=0, \\
(\mu+i)^2y_1+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{1-q}y_q=0, \\
(\mu+2i)^2y_2+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{2-q}y_q=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\mu+i(p-1))^2y_{p-1}+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-1-q}y_q=0, \\
(\mu+ip)^2y_p+\sum_{q=-\infty}^{\infty}a_{p-q}y_q=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases} \tag{9}$$

$$G:\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le \operatorname{Im}\mu \le \dfrac{1}{2},\\ -\infty < \operatorname{Re}\mu < +\infty.\end{cases} \tag{11}$$

Условие (10) будем называть условием поляризации характеристических показателей, α - некоторое комплексное число, принадлежащее полосе G , которое будем называть носителем поляризации.

Заметим, что матрица бесконечной линейной системы (9) имеет вид $(a_0 = 0)$

$$\begin{matrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\ldots & (\mu - ip) & a_{-p+(p-1)} & \ldots & a_{-p+1} & a_{-p-0} & a_{-p-1} & \ldots & a_{-p-(p-1)} & a_{-p-p} & \ldots\\
\ldots & a_{-(p-1)+p} & (\mu - i(p-1))^2 & \ldots & a_{-(p-1)+1} & a_{-(p-1)-0} & a_{-(p-1)-1} & \ldots & a_{-(p-1)-(p-1)} & a_{-(p-1)-p} & \ldots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\ldots & a_{-2+p} & a_{-2+(p-1)} & \ldots & a_{-2+1} & a_{-2-0} & a_{-2-1} & \ldots & a_{-2-(p-1)} & a_{-2-p} & \ldots\\
\ldots & a_{-1+p} & a_{-1+(p-1)} & \ldots & (\mu - i)^2 & a_{-1-0} & a_{-1-1} & \ldots & a_{-1-(p-1)} & a_{-1-p} & \ldots\\
\ldots & a_{0+p} & a_{0+(p-1)} & \ldots & a_{0+1} & (\mu - 0i)^2 & a_{0-1} & \ldots & a_{0-(p-1)} & a_{0-p} & \ldots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\ldots & a_{(p-1)+p} & a_{(p-1)+(p-1)} & \ldots & a_{(p-1)+1} & a_{(p-1)+0} & a_{(p-1)-1} & \ldots & (\mu + i(p-1))^2 & a_{(p-1)-p} & \ldots\\
\ldots & a_{p+p} & a_{p+(p-1)} & \ldots & a_{p+1} & a_{p+0} & a_{p-1} & \ldots & a_{p-(p-1)} & (\mu + ip)^2 & \ldots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{matrix}$$

Теперь бесконечную линейную систему (9) можно записать в векторной форме

$$A_0(\mu)\cdot \vec{y} = \vec{0}, \tag{9'}$$

где

$$\vec{y} = (\ldots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \ldots) \text{ -}$$

-неизвестный вектор, τ - операция транспонирования.

С помощью условия поляризации можно построить левую диагональную матрицу с нулевым носителем $(\alpha = 0)$

$$\lambda(\mu) = \begin{pmatrix}\ddots &&&&&&\\ & \dfrac{1}{(\mu-2i)^2} &&&&&\\ && \dfrac{1}{(\mu-i)^2} &&&&\\ &&& \dfrac{1}{(\mu-0i)^2} &&&\\ &&&& \dfrac{1}{(\mu+i)^2} &&\\ &&&&& \dfrac{1}{(\mu+2i)^2} &\\ &&&&&& \ddots\end{pmatrix}$$

эту матрицу назовем поляризующей матрицей (множитель).

Действуя слева поляризующей матрицей на векторное уравнение (9'), имеем

$$A_2(\mu)\vec{y} = \vec{0} \tag{11'}$$

где

$$A_2(\mu) = \left\| \left[A_2(\mu)\right]_{pq} \right\|_{-\infty}^{\infty}, \tag{12}$$

$$A_2(\mu) = \delta_{pq} + \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2},$$

где δ_{pq} - символ Кронекера.

Центральная часть данной матрицы выглядит так

$$\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\ldots\ 1 & \dfrac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2} & \dfrac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2} & \dfrac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2} & \dfrac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2}\ldots & \\
\ldots\dfrac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2} & 1 & \dfrac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2} & \dfrac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2} & \dfrac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2}\ldots & \\
\ldots\dfrac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2} & \dfrac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2} & 1 & \dfrac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2} & \dfrac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2}\ldots & \\
\ldots\dfrac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2} & \dfrac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2} & \dfrac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2} & 1 & \dfrac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2}\ldots & \\
\ldots\dfrac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2} & \dfrac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2} & \dfrac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2} & \dfrac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2} & 1\ \ldots & \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}$$

Теорема 1. Матрица (12) имеет нормальную форму [4,5].

В самом деле, очевидно, что при выполнении условия поляризации (10) произведение диагональных элементов равно 1 и двойной ряд, составленный из недиагональных элементов сходится абсолютно.

Также очевидно, что двойной ряд

$$\sum_{\substack{p,q=-\infty \\ p\neq q}}^{\infty} \frac{a_{p-q}}{(\mu + ip)^2}$$

сходится абсолютно в области G.

Тогда соответствующая бесконечная линейная система (9') называется нормальной, а определитель системы

$$\det A_0(\mu)$$

также называется нормальным.

Следующая наша задача – внесение полюсов в элементы матрицы, точнее, в нулевую строку матрицы $A_0(\mu)$. Для этого, пользуясь условием поляризации характеристических показателей, построим левую диагональную матрицу с ненулевым носителем $(\alpha \neq 0)$.

$$\lambda(\mu) = \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \\
& \dfrac{1}{(\mu-2i)^2-\alpha} & & & & & \\
& & \dfrac{1}{(\mu-i)^2-\alpha} & & 0 & & \\
& & & \dfrac{1}{(\mu-0i)^2-\alpha} & & & \\
& 0 & & & \dfrac{1}{(\mu+i)^2-\alpha} & & \\
& & & & & \dfrac{1}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \\
& & & & & & \ddots
\end{pmatrix} \tag{13}$$

$$
\begin{matrix}
\dots 1+\frac{\alpha}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\alpha} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\ \frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\alpha} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\alpha} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+i)^2-\alpha} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\alpha}\dots \\
\dots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\alpha} & 1+\frac{\alpha}{(\mu+2i)^2-\alpha}\dots
\end{matrix}
$$

....

Образно говоря, имея счетное множество поляризующих множителей

$$\prod_{p=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\mu+ip)^2-\alpha}$$

будем «рассеивать» их по соответствующим строкам.

О том, что данная матрица имеет нормальную форму достаточно вести доказательство как в отношении матрицы (12).

Соответствующее векторное уравнение запишем в виде

$$A_1(\mu)\vec{y}=0 \tag{14}$$

Теорема 2. Нормальность системы бесконечных линейных алгебраических уравнений не зависит от носителей поляризации.

В самом деле, действуя слева на векторное уравнение (14) поляризующей матрицей

$$
\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & \\
 & \frac{(\mu-2i)^2-\alpha}{(\mu-2i)^2-\beta} & & & & \\
 & & \frac{(\mu-i)^2-\alpha}{(\mu-i)^2-\beta} & & 0 & \\
 & & & \frac{(\mu-0i)^2-\alpha}{(\mu-0i)^2-\beta} & & \\
 & 0 & & & \frac{(\mu+i)^2-\alpha}{(\mu+i)^2-\beta} & \\
 & & & & & \frac{(\mu+2i)^2-\alpha}{(\mu+2i)^2-\beta} \\
 & & & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

имеем эквивалентное уравнение, матрица которого имеет вид

....

$$
\begin{matrix}
\dots 1+\frac{\beta}{(\mu-2i)^2-\beta} & \frac{a_{-2+1}}{(\mu-2i)^2-\beta} & \frac{a_{-2-0}}{(\mu-2i)^2-\beta} & \frac{a_{-2-1}}{(\mu-2i)^2-\beta} & \frac{a_{-2-2}}{(\mu-2i)^2-\beta}\dots \\
\dots\ \frac{a_{-1+2}}{(\mu-i)^2-\beta} & 1+\frac{\beta}{(\mu-i)^2-\beta} & \frac{a_{-1-0}}{(\mu-i)^2-\beta} & \frac{a_{-1-1}}{(\mu-i)^2-\beta} & \frac{a_{-1-2}}{(\mu-i)^2-\beta}\dots \\
\dots\frac{a_{0+2}}{(\mu-0i)^2-\beta} & \frac{a_{0+1}}{(\mu-0i)^2-\beta} & 1+\frac{\beta}{(\mu-0i)^2-\beta} & \frac{a_{0-1}}{(\mu-0i)^2-\beta} & \frac{a_{0-2}}{(\mu-0i)^2-\beta}\dots \\
\dots\frac{a_{1+2}}{(\mu+i)^2-\beta} & \frac{a_{1+1}}{(\mu+i)^2-\beta} & \frac{a_{1-0}}{(\mu+i)^2-\beta} & 1+\frac{\beta}{(\mu+i)^2-\beta} & \frac{a_{1-2}}{(\mu+i)^2-\beta}\dots \\
\dots\frac{a_{2+2}}{(\mu+2i)^2-\beta} & \frac{a_{2+1}}{(\mu+2i)^2-\beta} & \frac{a_{2-0}}{(\mu+2i)^2-\beta} & \frac{a_{2-1}}{(\mu+2i)^2-\beta} & 1+\frac{\beta}{(\mu+2i)^2-\beta}\dots
\end{matrix}
$$

где β -носитель поляризации, $\beta \neq \alpha$ в неравенстве (10), $\beta \in G, \mu \in G$.

Появление β вместо α не внесет ничего нового в нашу теорию, т. к. и то и другое будут устранены.

Отметим, что, несмотря на преобразования над матрицами бесконечной линейной системы (9) и векторными уравнениями (9'), (11'), они остаются эквивалентными, доказательства этого факта не представляют трудности.

Отметим, что бесконечная система линейных уравнений с матрицей, имеющей, нормальную форму называется нормальной системой, которая обладает многими свойствами конечных систем, в частности, однородная бесконечная линейная система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

Поэтому

$$\det A_1(\mu) = \det \left\| \left[A_1(\mu) \right]_{pq} \right\|_{-\infty}^{\infty} = 0 .$$

Это есть уравнение, определяющее характеристических показателей уравнения Хилла, в котором носителем поляризации $\alpha \neq 0$. Остается упростить.

Легко доказать, что уравнениями, определяющими характеристических показателей являются также (9')

$$\det A_0(\mu) = 0 ,$$

где $A_0(\mu)$ - матрица уравнения (9'), и

$$\det A_1(\mu) = 0,$$

а также уравнения (12)

$$\det A_2(\mu) = 0,$$

где $A_1(\mu)$ есть матрица уравнения (14) с носителем поляризации, где $\alpha \neq 0$. Другим словами эти три уравнения являются эквивалентными.

Литература:

1. Hill G. W. // On the part of the motion Lunar perigee wish is a function of the mean nrotions of the Sun and the moon. -Acta Math (1886).
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения- 2-ое изд.- М.: 1966. -530 с.
3. Карасаев И. К. // Об одном свойстве бесконечной матрицы, связанной с уравнениями свободных колебаний, содержащими производные только четных порядков/
4. Каган В. Ф. Основания теории определителей. - Одесса. 1922. - 393 с.
5. Бондаренко Г. В Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. - М.: АН СССР. - 48 с.