

**МЕТОД ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЗНОГО И МЕШАЮЩЕГО ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАПИСИ ДВУХФАЗОВЫХ ЦИФРОВЫХ ГОЛОГРАММ НА ФАЗОВЫХ СРЕДАХ**

*A.D. Akkozov, Zh. Abakirova*

**METHOD OF SPATIAL DIVISION OF USEFUL AND ERRONEOUS IMAGES FOR RECORD OF DOUBLE-PHASE DIGITAL HOLOGRAMS ON PHASE ENVIRONMENTS**

УДК: 681.385

*Рассматриваются свойства и недостатки метода двухфазового кодирования при цифровой записи фурье-голограмм на фазовых средах. Предлагается новый вариант этого метода. Приводится теоретическое обоснование преимуществ предлагаемого метода.*

*Properties and lacks of a method of double-phase coding are considered at digital record of fourier-hologramms on phase environments. The new variant of this method is offered. The theoretical substantiation of advantage of the offered method is shown.*

**Введение**

Одним из цифровых методов, нашедших широкое применение для синтеза голограмм на фазовых средах, является метод двух фазовой записи. Метод двухфазовой записи привлекателен тем, что он, в отличие от киноформа, позволяет записывать и амплитудную часть регистрируемого светового поля, тогда как при киноформной записи она отбрасывается. Исследованию этого метода посвящен целый ряд работ ученых как дальнего, так ближнего зарубежья, из которых можно отметить работы Л.П. Ярославского и его сотрудников[1-4]. В данной работе предлагается новый вариант записи двух фазовых голограмм, который позволяет улучшить качество восстановленного изображения.

**Первоначальный вариант метода двухфазовой записи**

Пусть голографируемый объект с пространственными размерами  $a \times b$  описывается своей излучательной функцией  $u(x, y)$ , финитной с областью финитности  $|x| \leq \frac{a}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{b}{2}$ , и имеющей фурье-образ

$$U(\xi, \eta) = F\{u(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta.$$

Функция

$$U(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) \exp[i\varphi(\xi, \eta)], \tag{1}$$

где

$$A(\xi, \eta) = |U(\xi, \eta)|, \quad \varphi(\xi, \eta) = \arg U(\xi, \eta), \tag{2}$$

может рассматриваться как сумма двух чисто фазовых функций

$$U_1(\xi, \eta) = A_0(\xi, \eta) \exp[i\varphi_1(\xi, \eta)], \quad U_2(\xi, \eta) = A_0(\xi, \eta) \exp[i\varphi_2(\xi, \eta)], \tag{3}$$

где

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) - \arccos \frac{A(\xi, \eta)}{2A_0}, \quad \varphi_2(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) + \arccos \frac{A(\xi, \eta)}{2A_0}. \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) очевидно, что такое разложение возможно при условии, что  $A_0$  выбирается из условия  $A_0 \geq \frac{A_{\max}}{2}$ , где

$$A_{\max} = \max_{\xi, \eta} A(\xi, \eta).$$

Обычно значение  $A_0$  выбирается равным минимально допустимому значению:  $A_0 = A_{\max} / 2$ .

Так как функции  $U_1(\xi, \eta)$  и  $U_2(\xi, \eta)$  являются чисто фазовыми, т. е.

$$|U_1(\xi, \eta)| = |U_2(\xi, \eta)| = A_0 = \text{const},$$

для их записи идеально подходит киноформная запись.

Сущность метода двухфазовой записи как раз и заключается в записи в пределах одной голограммы двух киноформов. Делается это следующим образом. В плоскости синтезируемой голограммы вводятся пространственно-частотные координаты  $\xi$ , и  $\eta$ , которые с ее пространственными координатами  $X_H$ ,  $Y_H$  связаны соотношениями

$$\xi = \frac{x_H}{\lambda f}, \quad \eta = \frac{y_H}{\lambda f}, \quad \text{где } \lambda - \text{длина световой волны лазерного излучения используемого при восстановлении}$$

голограммы;  $f$  - фокусное расстояние используемой при этом фурье-преобразующей линзы. В этой же плоскости вводится сетка  $\xi_n = n\Delta\xi$ ,  $\eta_m = m\Delta\eta$  ( $n = 0, \pm 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 0, \pm 1, 2, \dots, M$ ), шаги которой выбраны в соответствии с требованиями теоремы отсчетов

$$\Delta\xi \leq 1/a, \quad \Delta\eta \leq 1/b, \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  - пространственные размеры голографируемого объекта, излучательная функция которого  $u(x, y) \equiv 0$  при  $|x| > \frac{a}{2}$ ;  $|y| > \frac{b}{2}$ ;  $(2N + 1) \times (2M + 1)$  - объем выборки. Затем вычисляется матрица отсчетов  $U_{nm} = U(\xi_n, \eta_m)$  фурье-образа  $U(\xi, \eta)$ . Далее каждый отсчет

$$U_{nm} = A_{nm} \exp(i\varphi_{nm}), \quad \text{где } A_{nm} = |U_{nm}|, \quad \varphi_{nm} = \arg U_{nm},$$

представляется в виде суммы двух компонент-комплексных чисел одинакового модуля, причем постоянного для всех отсчетов:

$$U_{nm} = U_{1nm} + U_{2nm}, \quad (6)$$

$$\text{где } U_{1nm} = A_0 \exp(i\varphi_{1nm}), \quad U_{2nm} = A_0 \exp(i\varphi_{2nm}), \quad (7)$$

$$A_0 = A_{\max} / 2, \quad A_{\max} = \max_{n,m} \{A_{nm}\}, \quad (8)$$

$$\varphi_{1nm} = \varphi_{nm} - \arccos(A_{nm} / 2A_0), \quad \varphi_{2nm} = \varphi_{nm} + \arccos(A_{nm} / 2A_0). \quad (9)$$

Далее, каждый отсчет  $U_{nm}$  записывается в пределах ячейки  $(n, m)$  с размерами в пространственных частотах  $\Delta\xi \times \Delta\eta$  и с центром в точке отсчета  $(\xi_n, \eta_m)$  путем записи каждой пары его компонент  $U_{1nm}$  и  $U_{2nm}$  в пределах этой ячейки. Для этого каждая ячейка  $(n, m)$  фазовой среды, предназначенная для записи отсчета  $U_{nm}$ , разбивается на две подячейки вдоль одной из осей  $\xi$  и  $\eta$  (далее будем считать, что это сделано вдоль оси  $\xi$ ). При этом, первая компонента  $U_{1nm}$  записывается в левой подячейке, т. е. в пределах прямоугольной области с размерами  $\frac{\Delta\xi}{2} \times \Delta\eta$  и с центром в точке с координатами  $(n\Delta\xi - \frac{\Delta\xi}{2}, m\Delta\eta)$ , а вторая компонента  $U_{2nm}$  - в правой подячейке, т. е. в пределах прямоугольной области с такими же размерами  $\frac{\Delta\xi}{2} \times \Delta\eta$ , но с центром в точке с координатами  $(n\Delta\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, m\Delta\eta)$ , как это показано на рис. 1, а.

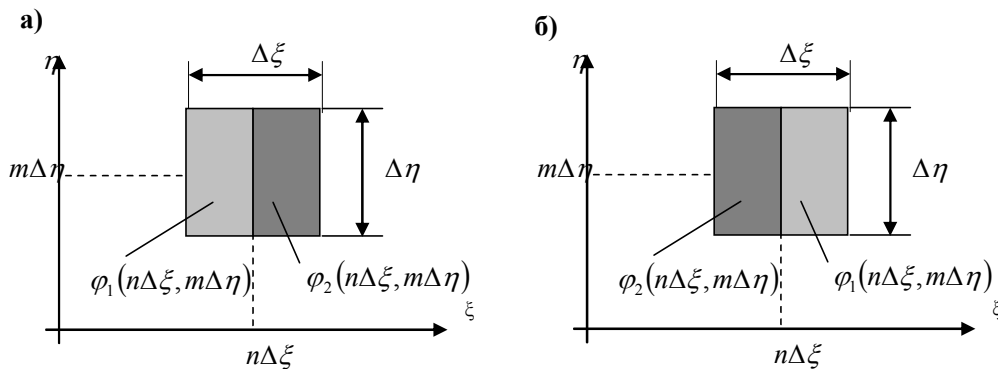


Рис. 1. Структуры элементарных ячеек  $(n, m)$  двухфазовых голограмм при прямой(а) и обратной(б) схемах записи

При этом  $\varphi_{1nm} = \arg U_{1nm}$  - аргумент(фаза) компоненты  $U_{1nm}$  кодируется оптической толщиной левой подячейки, а  $\varphi_{2nm} = \arg U_{2nm}$  - аргумент(фаза) компоненты  $U_{2nm}$  кодируется оптической толщиной правой подячейки. Кодирование же модулей(амплитуд), которые одинаковы и постоянны для всех  $(n, m)$ , обеспечивается постоянством амплитудного коэффициента пропускания(отражения) используемой при записи фазовой среды.

Матрица полученных таким образом ячеек и образует голограмму, синтезированную методом двухфазовой записи. Совокупность левых подячеек представляет первый киноформ, а совокупность правых подячеек - второй киноформ.

### Математический анализ структуры восстановленного изображения

Проанализируем структуру восстановленного изображения, восстановленного с голограммы, синтезированной выше сказанным способом. Функцию пропускания такой голограммы запишем в виде выражения

$$H(\xi, \eta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M t_{nm}(\xi, \eta),$$

где  $t_{nm}(\xi, \eta)$  - функция пропускания ячейки с номером  $(n, m)$  имеет вид

$$t_{nm}(\xi, \eta) = \left\{ \text{rect} \left[ \frac{\xi - (n - \frac{1}{4})\Delta\xi}{\Delta\xi/2} \right] \exp(i\varphi_{1nm}) + \text{rect} \left[ \frac{\xi - (n + \frac{1}{4})\Delta\xi}{\Delta\xi/2} \right] \exp(i\varphi_{2nm}) \right\} \text{rect} \left[ \frac{\eta - m\Delta\eta}{\Delta\eta} \right] \text{Здесь}$$

$\text{rect}(x)$  - прямоугольная функция, определяемая как

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Такая голограмма восстанавливает изображение, определяемое через обратное преобразование Фурье:

$$h(x, y) \sim F^{-1}\{H(\xi, \eta)\} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} H(\xi, \eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta = \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \times \\ \times \text{sinc}(\Delta\eta y) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ \tilde{u}\left(x - \frac{p}{\Delta\xi}, y - \frac{q}{\Delta\eta}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) - r\left(x - \frac{p}{\Delta\xi}, y - \frac{q}{\Delta\eta}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \right], \quad (10)$$

где

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x};$$

$$\tilde{u}(x, y) = \text{rect}(\Delta\xi x) \text{rect}(\Delta\eta y) \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M A_{nm} \exp(\varphi_{nm}) \exp[i2\pi(xn\Delta\xi + ym\Delta\eta)] \approx \\ \approx \text{rect}(\Delta\xi x) \text{rect}(\Delta\eta y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm} \exp(\varphi_{nm}) \exp[i2\pi(xn\Delta\xi + ym\Delta\eta)] = u(\xi, \eta), \quad (11)$$

$$r(x, y) = \text{rect}(\Delta\xi x) \text{rect}(\Delta\eta y) \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M \sqrt{A_{\max}^2 - A_{nm}^2} \exp(\varphi_{nm}) \exp[i2\pi(xn\Delta\xi + ym\Delta\eta)] = \\ = \text{rect}(\Delta\xi x) \text{rect}(\Delta\eta y) \sum_n \sum_m R_{nm} \exp(\varphi_{nm}) \exp[i2\pi(xn\Delta\xi + ym\Delta\eta)]; \quad (12)$$

$$R_{nm} = \sqrt{A_{\max}^2 - A_{nm}^2}. \quad (13)$$

Световые поля, описываемые функциями (11) и (12) соответственно названы полезными и мешающими изображениями.

Полезное изображение  $\tilde{u}(x, y)$  как следует из (11) имеет тот же фурье-спектр, что и голографируемый объект  $u(x, y)$ , но усеченный. Поэтому  $\tilde{u}(x, y) \approx u(x, y)$ , т. е. при достаточном объеме выборки  $(2N+1) \times (2M+1)$  полезное изображение совпадает с голографируемым объектом. Незначительное отличие является следствием усечения фурье-спектра объекта.

Согласно (12) и (13) мешающее изображение  $r(x,y)$  имеет искаженный амплитудный спектр и тот же фазовый спектр, что и полезное. Несмотря на это мешающее изображение, также представляет собой исходный объект, но зашумленный. Это объясняется тем, что при формировании изображения главенствующую роль играет фаза световой волны. Схожесть полезного и мешающего изображений явно проявляется, если объект диффузный. А если объект зеркальный, мешающее изображение представляет оконтуренное изображение исходного объекта.

Таким образом из (10) следует, что восстановленное изображение состоит из дифракционных порядков изображения, маскированных функцией  $\text{sinc}\left(\frac{\Delta x}{2}x\right)\text{sinc}(\Delta\eta y)$ . Кроме этого, в каждом дифракционном порядке наблюдается эффект наложения на полезное изображение  $\tilde{u}(x,y)$  мешающего изображения  $r(x,y)$ , при этом и полезное и мешающее изображения дополнительно маскируются функциями  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  и  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ , соответственно.

Очевидно, что качество восстановленного изображения, в целом, зависит от степени искажающего влияния мешающего изображения  $r(x,y)$  на полезное изображение  $\tilde{u}(x,y)$  и от характера искажений в самом мешающем изображении  $r(x,y)$ .

Из (10) следует, что мешающее изображение  $r(x,y)$  накладывается на полезное изображение, умножаясь на  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ . То есть степень искажающего влияния неравномерна и зависит от  $X$ . Для  $X$  близких нулю она мала и достигает максимально возможного значения при  $x=\pm p/\Delta\xi$ . В свою очередь полезное изображение маскируется функцией  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ . Функция  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  является четной, а функция  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  - нечетной. Поэтому для значений  $X$ , при которых  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  и  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  имеют одинаковые знаки, яркость выше, чем в точках, где эти маскирующие функции имеют разные знаки. Не трудно показать, что, если не учитывать общую маскирующую функцию  $\text{sinc}\left(\frac{\Delta x}{2}x\right)\text{sinc}(\Delta\eta y)$ , то огибающая яркости восстановленного изображения в среднем подчиняется закону изменения функции

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \right| = \sqrt{2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x + \frac{\pi}{4}\right) \right|. \quad (14)$$

Исходя из приведенного выше математического описания структуры восстановленного, можем сделать вывод. Он заключается в том, что искажающее влияние мешающего изображения на качество восстановленного изображения заключается в том, что восстановленное изображение будет зашумлено из-за испорченного амплитудного спектра мешающего изображения. Кроме того в дифракционных порядках  $(p,q)$  с четным значением  $p$  будет наблюдаться спад(завал) яркости к правым краям от их центров и подъем к левым краям. А в дифракционных порядках  $(p,q)$  с нечетным значением  $p$ , наоборот, будет наблюдаться спад яркости не к правым краям от их центров, а к левым и подъем не к левым краям, а к правым краям.

#### Об одном свойстве двухфазовых голограмм и идея методов встречной записи

Прежде чем изложить сущность метода предлагаемого нами в данной работе остановимся на одном важном свойстве метода двухфазовой записи.

Выясним, что случится, если поменять подячейки ролями. То есть, что случится, если при записи голограммы пользоваться не прямой схемой (рис. 1, а), а обратной (рис. 1, б),?

В этом случае вместо (10) имеем другое выражение для восстановленного изображения

$$h(x,y) \sim F^{-1}\{H(\xi,\eta)\} = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} H(\xi,\eta) \exp[i2\pi(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta = \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \text{sinc}(\Delta\eta y) \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ \tilde{u}\left(x - \frac{p}{\Delta x}, y - \frac{q}{\Delta\eta}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) + r\left(x - \frac{p}{\Delta\xi}, y - \frac{q}{\Delta\eta}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \right], \quad (15)$$

из которого видно, что в этом случае мешающее изображение накладывается на полезное изображение, умножаясь не на  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ , а умножаясь на  $+\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ , и вместо (14) будем иметь другой закон изменения огибающей яркости:

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \right| = \sqrt{2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x - \frac{\pi}{4}\right) \right|. \quad (16)$$

В этом случае имеем обратный эффект воздействия мешающего изображения. То есть в дифракционных порядках  $(p, q)$  с четным значением  $p$  будет наблюдаться подъем яркости к правым краям от их центров и спад(завал) к левым краям. А в дифракционных порядках  $(p, q)$  с нечетным значением  $p$  наоборот, будет наблюдаться подъем яркости не к правым краям от их центров, а левым и спад не к левым краям, а к правым краям.

Таким образом имеем важное свойство метода двухфазовой записи, заключающееся в том, что мешающее изображение накладывается на полезное умножаясь либо на  $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$ , либо на  $+\sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right)$  в зависимости от того, какая схема (прямая или обратная) записи будет использована.

В связи с этим свойством возникают вопросы: 1) что будет, если в пределах одной голограммы записывать две двухфазовых голограммы, первая из которых записывается по прямой схеме(рис.1, а), а вторая по обратной схеме(рис.1, б); 2) и можем ли, при этом, мы надеяться на взаимную компенсацию действий мешающих изображений двух голограмм.

В этом случае результирующая голограмма должна состоять из удвоенного количества строк. При этом высота строк должна быть равна не  $\Delta\eta$ , как это было раньше, а должна быть в двое меньше, то есть должна быть равной  $\Delta\eta/2$ . Если в строках с четным номером записывать первую голограмму, то в строках с нечетным номером следует записывать вторую голограмму. Или наоборот. Возможны несколько вариантов реализации таких голограмм.

Сущность одного из возможных вариантов, названного *методом простой встречной записи* рассматривался в работе [3]. В данной статье рассматривается вариант названный *методом встречной записи с пространственным разделением полезного и мешающего изображений*. Или просто *методом пространственного разделения полезного и мешающего изображений*.

#### Метод пространственного разделения полезного и мешающего изображений.

В методе простой встречной записи, рассмотренном в [3], первая двухфазовая голограмма осуществлялась путем записи отсчетов  $U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$  в пределах прямоугольных областей с центрами в точках  $(n\Delta\xi, m\Delta\eta - \frac{\Delta\eta}{2})$ , а вторая двухфазовая голограмма- путем записи тех же отсчетов  $U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$  в пределах прямоугольных областей с центрами в точках  $(n\Delta\xi, m\Delta\eta + \frac{\Delta\eta}{2})$ . То есть точки выборки отсчетов не совпадали с точками записи этих отсчетов. А это может оказаться источником появления фазовых ошибок, которые и не позволили ожидаемой полной взаимной компенсации негативных действий мешающих изображений двух двухфазовых голограмм. Поэтому можно надеяться лучших результатов, если синтез голограммы методом встречной записи произвести так, чтобы первая двухфазовая голограмма записывалась по отсчетам  $U(n\Delta\xi, m\Delta\eta - \frac{\Delta\eta}{2})$ , взятым в точках  $(n\Delta\xi, m\Delta\eta - \frac{\Delta\eta}{2})$ , а вторая двухфазовая голограмма – по отсчетам  $U(n\Delta\xi, m\Delta\eta + \frac{\Delta\eta}{2})$ , взятым в точках  $(n\Delta\xi, m\Delta\eta + \frac{\Delta\eta}{2})$ .

$(n = 0, \pm 1, 2, \dots, N; m = 0, \pm 1, 2, \dots, M)$ . Сказанное может быть реализована следующим образом:

1. Вычисляются отсчеты  $U(n\Delta\xi, m\Delta\eta)$  фурье-образа голографируемого объекта  $u(x, y)$ , при этом шаг дискретизации  $\Delta\xi$  выбирается как и раньше из условия  $\Delta\xi \leq 1/a$ , а шаг дискретизации  $\Delta\eta$  - из условия  $\Delta\eta \leq 1/2b$
2. Отсчеты с четным значением  $m$  записываются в соответствующих четных строках, используя прямую схему(рис. 1. а), а отсчеты с нечетным значением  $m$  записываются в соответствующих нечетных строках, используя обратную схему(рис. 1. б).

Не трудно убедиться в том, что синтезированная таким образом голограмма восстанавливает изображение

$$h(x, y) \sim \frac{1}{A_{\max}} \frac{\Delta\xi}{2} \Delta\eta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right) \operatorname{sinc}(\Delta\eta y) \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left\{ i^q \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[ [1 + (-1)^q] \cdot \tilde{u}\left(x - \frac{p}{\Delta x}, y - \frac{q}{\Delta\eta/2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + [1 + (-1)^{q+1}] \cdot r\left(x - \frac{p}{\Delta x}, y - \frac{q}{\Delta\eta/2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\Delta\xi x\right) \right] \right\}. \quad (17)$$

#### Вывод

Как видно из (17) восстановленное изображение состоит, также, из дифракционных порядков  $(p, q)$ . Изображения в дифракционных порядках  $(p, q)$ , для которых  $q$  является четным, состоят лишь из полезного изображения, а для которых  $q$  является нечетным - из мешающего изображения, помноженных на соответствующие маскирующие функции. То есть происходит пространственное разделение полезного и мешающего изображения по различным порядкам дифракции. Нас в основном интересует нулевой дифракционный порядок  $(p = 0, q = 0)$ . В нем можно ожидать повышения качества восстановленного изображения и понижения дифракционной эффективности, так как часть энергии уходит в месте мешающим изображением в другие дифракционные порядки.

#### Литература:

1. Ярославский Л.П., Мерзляков Н.С. Цифровая голография. - М., 1982.
2. Ярославский Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику. -М., 1987.
3. Акаев А. А., Бримкулов У. Н., Аккозов А. Дж., Сагимбаев А. А., Абакирова Ж. А. Метод встречной записи при синтезе двухфазовых цифровых фурье-голограмм на фазовых средах // Материалы международной конференции "Телекоммуникативные и информационные технологии. Состояние и проблемы развития". - Б., 2001.