НАУКА И НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ, № 1, 2006

Сатыбаев А.Дж.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

A.Dzh. Satybaev

PROOFS OF EXISTENCE THE OF ACOUSTICS DIRECT PROBLEM SOLUTION WITH FLAT BORDER

УДК: 517.968.22

Доказано существование решения прямой задачи акустики с плоской границей и мгновенным источником по времени.

There was proved the existence of solving the acoustics direct problem with it's plane limit and momentary source by time.

Таким же образом [см. предыдущую статью автора] можно показать, что справедливость неравенство

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le \max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\cdot$$

$$\sum_{j=-L}^{L}\ \sum_{i=N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{h_1}\right]^2\le B_2.$$

Покажем линейность функции

$$k\tau<t<(k+1)\tau,\ \ ih_1<\alpha<(i+1)h_1,\quad jh_2<y<(j+1)h_2$$

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau)=-u_{ij}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{i+1j}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)-$$

$$-u_{ij+1}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right);$$

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)=-u_{ij}^{k}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{i+1j}^{k}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)-$$

$$-u_{ij+1}^{k}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^{k}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right).$$

Отсюда следует:

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,t)=\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau)=$$

$$=\left(1-\frac{t-\tau k}{\tau}\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau).$$

Отсюда следует, что функция линейная функция.

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}u_{\alpha}^{2}(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy+$$

$$+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\leq$$

$$\leq\left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\max_{|i|\leq k\leq M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,\tau k)d\alpha dy+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)*$$

$$*\max_{|i|\leq k\leq M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}u_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\leq\max_{|i|\leq k\leq M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,\tau k)d\alpha dy\leq$$

$$\leq\max_{|i|\leq k\leq M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k+1}}{h_1}\right]^2\leq B_2.$$

Что и требовалось доказать. Докажем, что

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{y}^{2}(\alpha,y,t)d\alpha dy\leq B_3,\ \textit{если}\ \max_{|i|\leq k\leq M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}\right]^2<B_3$$

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,t)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_2}+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j}^{k+1}}{h_2};$$

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,k\tau)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2};$$

$$\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy=\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2}\right]^2d\alpha dy=\left|\begin{array}{l}\eta=\dfrac{y}{h_2}-j,\ h_2d\eta=dy\\ \xi=\dfrac{\alpha}{h_1}-i,\ h_1d\xi=d\alpha\end{array}\right|=$$

$$=h_1h_2\int_0^1\left[(1-\xi)\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}+\xi\cdot\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2}\right]^2d\xi=\left|c_2=\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}\quad d_2=\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2}\right|=$$

$$=h_1h_2\left[\frac{1}{3}c_2^2+2c_2d_2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{3}d_2^2\right]\leq\frac{h_1h_2}{2}\left(c_2^2+d_2^2\right)=\frac{h_1h_2}{2}\cdot\left[\left(\frac{u_{ij+1}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{i+1j}^{k}}{h_2}\right)^2\right].$$

Суммируя последнее при $i=\overline{N,N}$; $j=-\overline{L,L}$

$$\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\left(\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{i+1j+1}^k-u_{i+1j}^k}{h_2}\right)^2\right]\le B_3; \qquad (15)$$

Такой же неравенство можно установить и для

$$\max_{i\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le B_3.$$

Рассмотрим в параллелепипеде $k\tau<t<(k+1)$, $ih<\alpha<(i+1)h_1$, $jh_2<y<(j+1)h_2$ следующую функцию $\tilde{u}_y(\alpha,y,(k+1)\tau)=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)*\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_2}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j}^{k+1}}{h_2}$.

Отсюда

$$\tilde{u}_y(\alpha,y,t)=\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde{u}_y(\alpha,y,k\tau)+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_\alpha(\alpha,y,(k+1)\tau). \qquad (16)$$

Что и показывает линейность функции

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,t)dady=(1-(\frac{t}{\tau}-k))\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,k\tau)dady+(\frac{t}{\tau}-k)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_y^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\,dady\le$$

$$\le\left[1-(\frac{t}{\tau}+k)+\frac{t}{\tau}+k\right]\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)\,dady\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left|\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right|^2\le B_3.$$

Таким образом показали ограниченность и линейность кусочно-непрерывных функций $\tilde{u}(\alpha,y,t),\tilde{u}_t(\alpha,y,t),\tilde{u}_\alpha(\alpha,y,t),\tilde{u}_y(\alpha,y,t)$.

Покажем теперь существование следующих членов $\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial\alpha},\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t},\frac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$, т.е. можно выбрать сходящейся подпоследовательность функций $\left\{U_{ij}^k\right\},\left\{W_{ij}^k\right\},\left\{V_{ij}^k\right\}$, которые сходятся к вышеуказанным членам.

Обозначим через $v_{ij}^k=\frac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}$. Пусть выполнены (6) и а также для (v_{ij}^k) (?ijk) выполнено условии (6), т.е.

$$\left\{\begin{array}{ll} \max h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} (v_{ij}^k)^2 \le A; & \max h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{v_{ij}^k - v_{ij}^k}{\tau}\right)^2 \le B_1 \\ \max h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{v_{i+1j}^k - v_{ij}^k}{h_1}\right)^2 \le B_2; & \max h_1 h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{v_{ij+1}^k - v_{ij}^k}{h_2}\right)^2 \le B_3. \end{array}\right\} \quad (17)$$

Докажем, что справедливо $v(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha}$. Пусть $\alpha_2 > \alpha_1$

$$\tilde{u}(\alpha_2, y, t) - \tilde{u}(\alpha_1, y, t) = \tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) - \tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) =$$

$$= \sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} \frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} * h_1 + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) = \sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} v_{ij}^k h_1 + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) =$$

$$= \sum_{i=\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1} \int_{ih_1}^{(i+1)h_1} v(\alpha, y, k\tau)d\alpha + O\left(|\alpha_2 - \alpha_1|\sqrt{h_1}\right) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, k\tau)d\alpha +$$

$$+ O\left(|\alpha_2 - \alpha_1|\sqrt{|t - k\tau|}\right) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, t)d\alpha + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) \quad (18)$$

Отсюда при $h_1 \to 0$, $h_2 \to 0$, $\tau \to 0$ h1 0, h2 0, 0 имеем

$$\tilde{u}(\alpha_2, y, t) - \tilde{u}(\alpha_1, y, t) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v(\alpha, y, t)d\alpha. \quad (19)$$

Дифференцируя последнюю формулу, получим $v(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha, y, t)}{\partial \alpha}$.

Обозначим через $W_{ij}^k = \dfrac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau}$. Пусть для W_{ij}^k выполнены неравенство вида (17). Покажем, что справедливо равенство $W(\alpha, y, t) = \dfrac{\partial \tilde{u}(\alpha, y, t)}{\partial t}$.

$$\tilde{u}(\alpha,y,t_2)-\tilde{u}(\alpha,y,t_1)=\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right)-\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t_2}{\tau}\right]\tau\right)+$$

$$+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{k=\left[\frac{t_2}{\tau}\right]+1}^{\left[\frac{t_1}{\tau}\right]-1}\frac{\tilde{u}_{ij}^{k+1}-\tilde{u}_{ij}^{k}}{\tau}*\tau+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)\quad(20)$$

Также как и выше рассуждая

$$\tilde{u}(\alpha,y,t_2)-\tilde{u}(\alpha,y,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}W(\alpha,y,t)dt.\quad(21)$$

Дифференцируя формулу (21) получим $W(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial t}$.

Обозначим через $V_{ij}^k=\dfrac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}$. Пусть для V_{ij}^k также выполнены неравенства вида (17).

Покажем что $\mathrm{V}(\alpha,\mathrm{y},\mathrm{t})=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$. $\tilde{u}(\alpha,y_2,t)-\tilde{u}(\alpha,y_1,t)=\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_2}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)-$

$$-\tilde{u}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right)+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right)=\sum_{y=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]}\frac{\tilde{u}_{ij+1}^{k}-\tilde{u}_{ij}^{k}}{h_2}h_2+O\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}\right).\ (22)$$

Следовательно, $V(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}(\alpha,y,t)}{\partial y}$.

Таким образом, можно выбрать сходящиеся подпоследовательность сеточных функций $\left\{u_{ij}^k\right\},\left\{U_{ij}^k\right\},\left\{W_{ij}^k\right\},\left\{V_{ij}^k\right\}$ которые сходятся к функциям u, U, W, V следовательно к функциям $u,\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\dfrac{\partial u}{\partial\tau},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Покажем теперь существования следующих производных

$\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2},\ \dfrac{\partial^2u}{\partial\alpha^2},\ \dfrac{\partial^2u}{\partial y^2},\ \dfrac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial y}$. *Существования производных* $\dfrac{\partial u}{\partial\alpha},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}$

доказа ны. Обозначим через $\nu_{2ij}^k=\dfrac{\nu_{i+1j}-\nu_{ij}^k}{h_1}$.

Пусть выполнены.

$$\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(v_{2ij}^{k}\right)^2\le A,\quad \max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(v_{2ij}^{k+1}-v_{2ij}^{k}\right)^2\le B_1,$$

$$\max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum\left(\frac{v_{2i+1j}^{k}-v_{2ij}^{k}}{h_1}\right)^2\le B_2,\quad \max_{|i|\le k\le M} h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{v_{2ij+1}^{k}-v_{2ij}^{k}}{h_2}\right)^2\le B_3.$$

$$\tilde{v}(\alpha,y_2,t)-\tilde{v}(\alpha,y_1,t)=\tilde{v}(\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau)-\tilde{v}(\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]h_1,\left[\frac{y}{h_2}\right]h_2,\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau)+$$

$$+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau})=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}\frac{v_{i+ij}{}^{k}-v_{ij}{}^{k}}{h_1}+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau})=$$

$$=\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]-1}v_{2ij}{}^{k}h_1+O(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}+\sqrt{\tau}).\qquad(24)$$

Проинтегрируем от ih_1 до $(i+1)h_1$, тогда

$$\sum_{i=\left[\frac{\alpha_1}{h_1}\right]}^{\left[\frac{\alpha_2}{h_1}\right]}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}v_2(\alpha,y,k\tau)d\alpha+O(|\alpha_2-\alpha_1|*\sqrt{h_1})=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}v(\alpha,y,k\tau)d\alpha+O(|\alpha_2-\alpha_1|)+O(\sqrt{h_2})+$$

$+O(|\alpha_2-\alpha_1|)\sqrt{(t-k\tau)}$. Следовательно $v(\alpha_2,y,t,)-v(\alpha_1,y,t,)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}v_2(\alpha,y,t)+O\,(\sqrt{h_1,h_2,\tau})$.

Дифференцируя последнее, получим $v_2(\alpha,y,t)=\dfrac{\partial v(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}=\dfrac{\partial^2u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}$.

Таким же образом можно показать

$$W_2(\alpha,y,t)=\frac{\partial W(\alpha,y,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2u(\alpha,y,t)}{\partial t^2};\quad V_2(\alpha,y,t)=\frac{\partial V(\alpha,y,t)}{\partial y}=\frac{\partial^2u(\alpha,y,t)}{\partial y^2}.$$

Покажем существование производной $\dfrac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial y}$.

Обозначим $P_{2ij}^{k}=\dfrac{U_{ij+1}^{k}-U_{ij}^{k}}{h_2}$. Пусть выполнены

$$\begin{cases} \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(P_{2ij}^k\right)^2 \le A, & \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{2i+j}^k - P_{2ij}^k}{h_1}\right)^2 \le B_2, \\ \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{ij}^{k+1} - P_{ij}^k}{\tau}\right)^2 \le B_1, & \max\limits_{|i|\le k\le M} h_1h_2 \sum\limits_{j=-L}^{L} \sum\limits_{i=-N}^{N} \left(\dfrac{P_{ij+1}^{k+1} - P_{ij}^k}{h_2}\right)^2 \le B_3. \end{cases}$$

(25)

$$\nu(\alpha, y_2, t) - \nu(\alpha, y_1, t) = \tilde{\nu}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y_2}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) - \tilde{\nu}\left(\left[\frac{\alpha}{h_1}\right]h_1, \left[\frac{y_1}{h_2}\right]h_2, \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) =$$

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} \frac{\nu_{ij+1}^k - \nu_{ij}^k}{h_2} h_2 + O\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}\right) = \sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} P_{2ij}^k h_2 + O(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{\tau}).$$

Проинтегрируем от jh^2 до $(j+1)h_2$, тогда

$$\sum_{j=\left[\frac{y_1}{h_2}\right]}^{\left[\frac{y_2}{h_2}\right]-1} \int_{ih_2}^{(j+1)h_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(|y_2 - y_1|\sqrt{h_2}\right) =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, k\tau)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\right) + O\left(\sqrt{h_2}\right) + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\xi\sqrt{t - k\tau}\right).$$

Отсюда следует $$\nu(\alpha, y_2, t) - \nu(\alpha, y_1, t) = \int_{y_1}^{y_2} P_2(\alpha, y, t)dy + O\left(\left[y_2 - y_1\right]\sqrt{t - k\tau}\right).$$

При $h_1 \to 0, h_2 \to 0, \ \tau \to 0$ продифференцируем последнее равенство по y

$$P_2(\alpha, y, t) = \frac{\partial v(\alpha, y, t)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\alpha, y, t)}{\partial \alpha \partial y},$$ и т.д.

Пусть шаги τ , h_1, h_2, по t, α , y пробегают некоторые числовые последовательности $\{\tau_s\}, \{h_{1s}\}, \{h_{2s}\}$, *где* $(\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) > 0$ *и* $\lim\limits_{s \to \infty} (\tau_s, h_{1s}, h_{2s}) \to 0.$

Пусть для каждой s построены конечно-разностные решения задачи (3).

Тогда учитывая, что все эти решения вне характеристического угла равны нулю, то существует последовательность $\left\{(u^k_{i,j})^s\right\}$, для некоторой $u^k_{i,j}$ слабо сходится в норме $L_2(\Omega(T,D))$ и сильно сходится в норме $W_2^1(\Omega(T,D))$ к функции $u(\alpha, y, t)$, т.е.

$$\left\| u^k_{i,j} - u(\alpha, y, t) \right\|_{W_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{\text{слабо}} 0, \qquad \left\| u^k_{i,j} - u(\alpha, y, t) \right\|_{L_2(\Omega(T,D))} \xrightarrow{\text{сильно}} 0. \qquad (26)$$

Покажем, что функция $u(\alpha, y, t)$ есть обобщенное решение задачи (3), т.е. справедливость равенство (*). Для u^k_{ij} справедливо равенство

$$\tau h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \sum_{k=|i|}^{M} \left\{ \left[(u^k_{i,j})^s_{t\bar{t}} - (u^k_{i,j})^s_{\alpha\bar{\alpha}} - L(u^k_{i,j})^s \right] \cdot \Phi^k_{ij} \right\} = 0. \qquad (27)$$

Используя формулу "суммирование по частям" и "дифференцирование" произведений преобразуем каждый член последнего равенства (для краткости индекс опускаем)

$$\sum_{k=|i|}^{M} (u^k_{i,j})_{t\bar{t}} \cdot \Phi^k_{i,j} = -\sum_{k=|i|}^{M} (u^k_{i,j})_t \cdot (\Phi^k_{i,j})_{\bar{t}}(k) + (u^k_{i,j})_t(M)(\Phi^k_{i,j})(M) - (u^k_{i,j})_t(|i|)(\Phi^k_{i,j})|i|;$$

$$\sum_{k=|i|}^{M} (u^k_{i,j})_{\alpha\bar{\alpha}} \cdot \Phi^k_{i,j} = \sum_{k=|i|}^{M} \left[((u^k_{i,j})_{\bar{\alpha}} \cdot \Phi^k_{i,j})_\alpha - (u^k_{i,j})_\alpha \cdot (\Phi^k_{i,j})_\alpha \right] =$$

$$= -\sum_{k=|i|}^{M} \left\{ \left[(u^k_{i,j})_\alpha \cdot (\Phi^k_{i,j})_{\bar{\alpha}} + (u^k_{i,j})_\alpha (M) \cdot \Phi^k_{i,j}(M) - (u^k_{i,j})(|i|) \cdot \Phi^k_{i,j}(|i|) \right]_\alpha - \right.$$

$$\left. -(u^k_{i,j})_\alpha (\Phi^k_{i,j})_\alpha \right\} = -\sum_{k=|i|}^{M} \left[(u^k_{i,j})_\alpha \cdot (\Phi^k_{i,j})_{\bar{\alpha}} + (u^k_{i,j})_\alpha (\Phi^k_{i,j})(i+1)(k) \ \right] +$$

$$+ (u^k_{i,j})_\alpha (M) \Phi^k_{i,j}(M) - (u^k_{i,j})(|i|) \cdot (\Phi^k_{i,j})_\alpha (|i|).$$

$$\sum_{k=|i|}^{M} C_{i,j}^{2} u_{y\bar{y}} \cdot \Phi_{i,j}^{k} = -\sum_{k=|i|}^{M} \Big[C_{i,j}^{2} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{y} - C_{i,j}^{2} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{y} -$$

$$-C_{i,jy}^{2} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \Phi_{i,j}^{k} \Big] \cdot (k) = -\sum_{k=|i|}^{M} \Big[C_{i,j}^{2} u_{i,j}^{k} \Phi_{i,j}^{k} + C_{i,j}^{2}(D) u_{i,j}^{k}(D) (\Phi_{i,j}^{k})(D) -$$

$$-C_{i,j}^{2}(-D)(u_{i,j}^{k})(-D)\Phi_{i,j}^{k}(-D) \Big]_{y} + C_{i,j}^{2} (u_{i,j}^{k})_{y} (\Phi_{i,j}^{k})_{y} + C_{i,j,y}^{2} (u_{i,j}^{k})_{\bar{y}} \Phi_{i,j}^{k} =$$

$$= -\sum_{k=|i|}^{M} C_{ij}^{2} \left(u_{ij}^{k}\right)_{y} \left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y} + C_{ij}^{2} \left(u_{ij}^{k}\right)_{y} \Phi_{ij}^{k}(i+1); \qquad \sum_{k=|i|}^{M} C_{ij}^{2} \alpha_{\bar{y}}\, u_{\overline{\alpha y}} \cdot \Phi_{ij}^{k} =$$

$$= -\sum_{k=|i|}^{M} \left\{ \left[C_{ij}^{2} \alpha_{\bar{y}} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \left(\Phi_{ij}^{k}\right) \right]_{y} - C_{ijy}^{2} \alpha_{\bar{y}} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \Phi_{ij}^{k} - C_{ij}^{2} \alpha_{y\bar{y}} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \Phi_{ij}^{k} - \right.$$

$$\left. - C_{ij}^{2} \alpha_{\bar{y}} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \cdot \left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y} \right\} (k) = -\sum_{k=|i|}^{M} C_{ij}^{2} \alpha_{\bar{y}} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \left(\Phi_{ij}^{k}\right)_{y} + \left(C_{ij}^{2} \alpha_{\bar{y}}\right)_{y} \left(u_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \Phi_{ij}^{k}(j+1).$$

Тогда формула (27) будет

$$\tau h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \sum_{k=|i|}^{M} \Big[(u_{i,j}^{k})_{t} (\Phi_{i,j}^{k})_{\bar{t}} + (u_{i,j}^{k})_{\alpha} \cdot (\Phi_{i,j}^{k})_{\alpha} + C_{i,j}^{2} (u_{i,j}^{k})_{y} (\Phi_{i,j}^{k})_{y} +$$

$$+ C_{i,j}^{2} \alpha_{y} (u_{i,j}^{k})_{\alpha} (\Phi_{i,j}^{k})_{y} \Big] + \Big[(u_{i,j}^{k})_{\alpha} (\Phi_{i,j}^{k})(i+1) + C_{i,j,y}^{2} (u_{i,j}^{k})_{y} (\Phi_{i,j}^{k})(i+1) +$$

$$+ \left(C_{i,j}^{2} \alpha_{\bar{y}}\right)_{y} (u_{i,j}^{k})_{\alpha} \Phi_{ij}^{k}(j+1) - C_{i,j}^{2} \Delta\alpha_{i,j} (u_{i,j}^{k})_{\alpha} \Phi_{ij}^{k}(j+1) - C_{i,j}^{2} \frac{\rho_{i,j,\bar{\alpha}}}{\rho_{i,j}} \alpha_{\bar{y}} (u_{i,j}^{k})_{y} \Phi_{i,j}^{k} -$$

$$- C_{i,j}^{2} \frac{\rho_{i,j,\bar{y}}}{\rho_{i,j}} \alpha_{\bar{y}} (u_{i,j}^{k})_{\alpha} \Phi_{i,j}^{k} - C_{i,j}^{2} \frac{\rho_{i,j,\bar{y}}}{\rho_{i,j}} u_{\bar{y}} \Phi_{i,j}^{k} \Big] (k) -$$

$$- h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \Big[(u_{i,j}^{k})_{t} (M) \Phi_{i,j}^{k}(M) - (u_{i,j}^{k})_{t} (|i|) \Phi_{i,j}^{k}(|i|) + (u_{i,j}^{k})_{\alpha} (M) \Phi_{i,j}^{k}(M) - (u_{i,j}^{k})_{\alpha} (|i|) \Phi_{i,j}^{k}(|i|) \Big] =$$

$$= \tau h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} S_{i,j} \Phi_{i,j}^{i}, \qquad k = |i|, \quad M. \tag{28}$$

Переходя к пределу, при $\tau \to 0, h_1 \to 0, h_2 \to 0$, получим

$$\int_0^t \int_{-D}^{D} \int_{|\alpha|}^{t} \Bigg[\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\tau} \left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{\tau} + \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{\alpha} + C_{ij}^{2} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{y} \left(\tilde{\Phi}_{ij}^{k}\right)_{y} + C_{ij}^{2} \alpha_{y} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \tilde{\Phi}_{ij}^{k} +$$

$$+ C_{ij}^{2} \Delta \alpha_{ij} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\overline{\alpha}} \cdot \tilde{\Phi}_{ij}^{k} - \frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overline{\alpha}}}{\rho_{ij}} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha} \tilde{\Phi}_{ij}^{k} - C_{ij}^{2} \frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overline{\alpha}}}{\rho_{ij}} \alpha_{\overline{y}} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\overline{y}} \tilde{\Phi}_{ij}^{k} -$$

$$- C_{ij}^{2} \frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overline{y}}}{\rho_{ij}} \alpha_{\overline{y}} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\overline{\alpha}} \tilde{\Phi}_{ij}^{k} + \frac{\left(\rho_{ij}\right)_{\overline{y}}}{\rho_{ij}} \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\overline{y}} \cdot \tilde{\Phi}_{ij}^{k} \Bigg] d\alpha\, dy\, d\tau =$$

$$= \int_{|\alpha|}^{t} \int_{-D}^{D} \tilde{S}_{ij} \tilde{\Phi}_{ij}^{i}\, d\tau\, dy, \ t \in (0, T)$$

где волнистой черточкой на вверху обозначены кусочно-непрерывные функции, совпадающей с соответствующей функцией в узлах сетки. Так как все эти кусочно-непрерывные функции сходятся к соответствующему функцию, а также учитывая, что $\left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right), \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{t}, \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{\alpha}, \left(\tilde{u}_{ij}^{k}\right)_{y}$ сходятся слабо к функциям $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Тогда переходя к пределу, получим обобщенное решение (*). Таким образом, доказана теорема

Теорема. Пусть выполнены условия (2),(6),(17),(24),(25) и функция $u(\alpha, y, t)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в $\Omega(T, D)$ и пусть $S(t, y) \in L_2(\Omega(T, D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (3) в пространстве $W_2^1(\Omega(T, D))$.

Литература:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - Москва: Наука, 1984. - 264 с.
2. Кабанихин С.И. Проекционно - разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. -168с.
3. Сатыбаев А.Дж., Мирсайитова М.Э. Обратная задача акустики с плоской границей//Наука. Образование. Техника. /Международный научный журнал №2(4). Ош, 2000. - С. 101-104.