

Мураталиева В.Т.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УПРОЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

V. T. Muratalieva

APPLICATION OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT FOR CONSTRUCTION FOR NUMERICAL SOLUTION FOR THE SIMPLIFIED LINEAR BOLTZMANN EQUATION

УДК: 517.9

В статье рассматривается возможность построения численного решения для линейного упрощенного интегро-дифференциального уравнения Больцмана. С этой целью исходное уравнение сначала преобразуется к системе интегральных уравнений с дополнительным аргументом, удобных для применения метода последовательных приближений. Численное решение строится с помощью последовательных приближений. Представлены результаты расчетов для конкретно заданных начальных условий и коэффициентов.

The paper represents some new way to construct a numerical solution for the integro-differential linear Boltzmann equation. With help of the method of additional argument the initial integro-differential equation is transformed to a system of the integral equations convenient for application of the iterative procedure method. Then for these integral equations with additional argument the approximate solution is constructed on the basis of a method of successive approximations. The corresponding algorithms was been programmed with usage of Visual C++. For the concrete examples of initial conditions and coefficients the numerical solution was yielded.

Академик М.И. Иманалиев разработал новый метод исследования нелинейных дифференцированных уравнений с частными производными первого порядка, который называется методом дополнительного аргумента. С помощью этого метода уравнения с частными производными преобразуются к интегральным уравнениям, где количество независимых переменных на одну больше.

Применение данного метода позволяет более эффективно и конкретно определять условия разрешимости уравнений 1-го порядка [3;4;5;6].

В данной статье показано, что с помощью метода дополнительного аргумента можно достаточно просто и надежно находить численные решения для линейного упрощенного уравнения Больцмана [1,2]:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} + a(v,t,f) \frac{\partial f(v,t)}{\partial v} + v(v,t)f(v,t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(v,v')v(v',t)f(v',t)dv', \quad (1)$$

где $f(v, t)$ - неизвестная функция времени и скорости, когда η , описывающая распределение электронов в ионизированной среде.

Для уравнения (1) задается начальное условие:

$$f(v,0) = f_0(v), \quad (2)$$

где $f_0(v)$ - заданная функция.

Задачи такого типа появляются при переносе нейтронов через ядро ядерного реактора, при изучении убегающих электронов в ионизированной плазме, при вычислении проводимости постоянного тока в биологических мембранах и в теории полупроводников [1,2].

Численная реализация метода дополнительного аргумента не заменяет другие известные методы, а дополняет их. Так, в частности, применение этого метода несложно и позволяет получать приближенные решения сразу в исходных координатах. Применимость метода дополнительного аргумента для уравнений математической физики показана в [5]. В [7] на основе этого метода реализовано численное решение модельной задачи.

В соответствии с методом дополнительного аргумента для задачи (1)-(2) запишем расширенную характеристическую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\eta(v,t,s)}{ds} = a(\eta(v,t,s),s) \cdot \eta(v,t,s) \\ \frac{dv(v,t,s)}{ds} = -v(\eta(v,t,s),s) \cdot \eta(v,t,s) + \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta(v,t,s),v') \cdot v(v',t) \cdot \eta(v',s,s) \cdot dv' \\ + \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta(v,t,s),v') \cdot v(v',t) \cdot w(v',s,s) \cdot dv' \end{cases} \quad (3_2)$$

с условиями Коши:

$$\eta \Big|_{s=t} = v, \quad (4)$$

$$w(v, t, o) = f_o(\eta(v, t, o)) \quad (5)$$

Решая (3₂) с учетом (5) получаем что система дифференциальных уравнений (3₁) (3₂) с данными

$$\left\{ \begin{aligned} \eta(v, t, s) &= v - \int_s^t a(\eta(v, t, \rho), \rho, w(v, t, \rho)) d\rho \\ w(v, t, s) &= e^{-\int_0^s v(\eta, \rho) d\rho} \left(f_o \left(v - \int_0^t a(\eta(v, t, \rho), \rho, w(v, t, \rho)) d\rho \right) + \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta(v, t, \rho), v') \times \right. \\ &\quad \left. \times v(v', \rho) w(v', \rho, \rho) e^{\int_0^{\rho} v(\eta(v, t, \xi), \xi) d\xi} dv' d\rho. \right. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Для того чтобы искать решение в классе ограниченных функций, произведем замену: $\mu(v, t, s) = v - \mu(v, t, s)$.

Тогда система (6) примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu(v, t, s) &= \int_s^t a(v - \mu, \rho, w) d\rho \\ w(v, t, s) &= e^{-\int_0^s (v - \mu, \rho) d\rho} \left[f_o \left(v - \int_0^t a(v - \mu, \rho, w) d\rho \right) + \right. \\ &\quad \left. \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} k(v - \mu, v') v(v', \rho) w(v', \rho, \rho) \times e^{\int_0^{\rho} (v - \mu, \xi) d\xi} dv' d\rho \right]. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Эта система рассматривается при заданных функциях $a(v, t, f)$, $v(v, t)$, $k(v, v')$, $Q_T = \{(v, t, s) : -\infty < v < +\infty; 0 \leq s \leq t \leq T\}$, в области

Сделаем замену в системе (7)

$$Z(v, t, s) = w(v, t, s) e^{\int_0^s (v - \mu, \rho) d\rho},$$

переходим к системе:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu(v, t, s) &= \int_s^t a \left(v - \mu, \rho, Z e^{-\int_0^{\rho} (v - \mu, \rho) d\rho} \right) d\rho \\ Z(v, t, s) &= f_o \left(v - \int_0^t a \left(v - \mu, \rho, Z e^{-\int_0^{\rho} (v - \mu, \xi) d\xi} \right) d\rho \right) + \\ &\quad + \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} k(v - \mu, v') v(v', \rho) Z(v', \rho, \rho) dv' d\rho. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Для численной разработки программы был выбран язык программирования Microsoft Visual C++ 6.0, который является объектно-ориентированным языком

Коши (4)-(5) эквивалентна системе интегральных уравнений.

программирования, позволяющий создавать наглядную, структурированную программу.

Его компилятор позволяет оптимизировать исходный код для максимального быстродействия. Важной особенностью является то, что в Visual C++ очень легко программировать графический интерфейс с помощью OpenGL, для отображения двух и трехмерной графики.

Для того, чтобы найти функции и будем использовать приближенные сеточные функции. Поэтому, вводим двумерную, равномерную сетку по осям и.

Задача численных расчетов сводится к нахождению значений функций в узлах сетки и дальнейшей их визуализации на графике.

Вводим 2 индексные переменные, и константы N_v и N_t , такие что

Для решения системы нам потребуется следующие массивы:

$$Z[N_v][N_t][N_t],$$

$$w[N_v][N_t][N_t]$$

Численное интегрирование проводится методом прямоугольников, так как имеет ряд несомненных преимуществ перед другими методами, а именно

1. Метод прямоугольников по сравнению с методом трапеций, сплайнов выигрывает в скорости работы,

2. Выбранный метод не значительно уступает в точности другим методам.

Для реализации поставленной задачи используется среда Microsoft Developer Studio.

Тип заданных данных будем брать double - с плавающей точкой, повышенной точности. Размер double составляет 8 байт.

Программа состоит из 2-х частей: расчетный модуль и визуализатор-которые, могут работать независимо друг от друга. Расчетный модуль,

выполняет расчеты, согласно заданным данным и сохраняет результаты в специальные файлы.

Программа - визуализатор считывает эти данные и выводит на экран компьютера в виде трехмерных графиков, меняющихся по итерациям. Возможно несколько вариантов визуализации - точками, проволочной моделью и поверхностью с соответствующим освещением. Графики для удобства можно вращать на произвольные углы. Программа - визуализатор работает с библиотеками OpenGL.

Для простоты программирования все параметры вводятся и изменяются в самом коде программы. Программа начинается с определения начальных данных

```
ii define N_v
ii define N_t
```

Далее вводятся функции для расчета:

$$f_0(\text{double } v) = f_0(v),$$

$$k(\text{double } v, \text{double } v1) = k(v, v'),$$

$$nu(v_real(vi), t_real(ti)) = \nu(v, t).$$

Были проведены расчеты при $v \in [-10; 10]$ и $t \in [0; 3]$.

Начальное распределение задается Максвеллом:

$$f_0^{(1)}(v) = v \cdot e^{-0,5v^2} \quad \text{и функцией вида}$$

$$f_0^{(2)}(v) = \begin{cases} (v-2)^2(v+2)^2, & -2 \leq v \leq 2 \\ 0, & -10 \leq v < -2 \\ \text{и } 2 < v \leq 10. \end{cases}$$

$$\text{Ядро } k(v, v') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(v-v')^2}{2}}; \quad \text{функция,}$$

задающая частоту столкновения

$$\nu(v) = \begin{cases} \frac{1}{|v|^3}, & v \in (-10; -2) \cup (2; 10) \\ s_1(v), & v \in [-2; 1) \\ s_2(v), & v \in [1; 2] \end{cases}$$

где

$$s_1(v) = 1 - 0,583(v-1) - 0,438(v-1)^2 - 0,049(v-1)^3,$$

$$s_2(v) = 0,125 - 1,021(v-2) + 0,146(v-2)^3 -$$

кубические сплайны.

Функция $a(v, t, f)$ считается постоянной:

$$a(v, t, f) = 0,15.$$

Тогда система (8) для $f_0^{(1)}(v)$ примет вид:

$$\begin{cases} \mu(v, t, s) = a(t-s) \\ Z(v, t, s) = (v-at)e^{-0,5(v-at)^2} + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} e^{-0,5(v-\mu-v')^2} \nu(v', \rho) Z(v', \rho) dv' d\rho. \end{cases} \quad (9)$$

Основной счет состоит из 3-х частей:

1. Инициализация массивов начальными данными,
2. Расчет методом итераций всех функций,
3. Сохранение результатов в файл.

Расчет производится по формулам (9), полученные функции записываются в файл в специальном формате, который состоит из начальных параметров и самих данных; далее визуализатор считывает данные с этого файла и выводит в графическом виде.

Перейдем к приближенным вычислениям. Выберем натуральное $N-v$, $N-t$

Тогда по формулам прямоугольников из (9) получим:

$$\begin{aligned} Sum+ &= k(t_real(ro) - a * t_real(ti), v_real(ush)) * \\ &* Z[ush][ro][ro] * nu(v_real(vi)); \\ Z[vi][ti][si] &= f_0(v_real(vi) - a * t_real(ti)) + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ Sum * (v_real(2) - v_real(1)) * (t_real(2) - t_real(1));$$

$$w[vi][ti][si] = Z[vi][ti][si] * \exp(-t_real(si) * nu(v_real(vi)))$$

Для реализации вычислений по формулам, аналогичным (10), была составлена программа на языке Visual C++. В ней задаются количество узлов сетки по v и t , шаги сетки по v и t и количество итераций. Результаты расчетов выводятся в графическом виде.

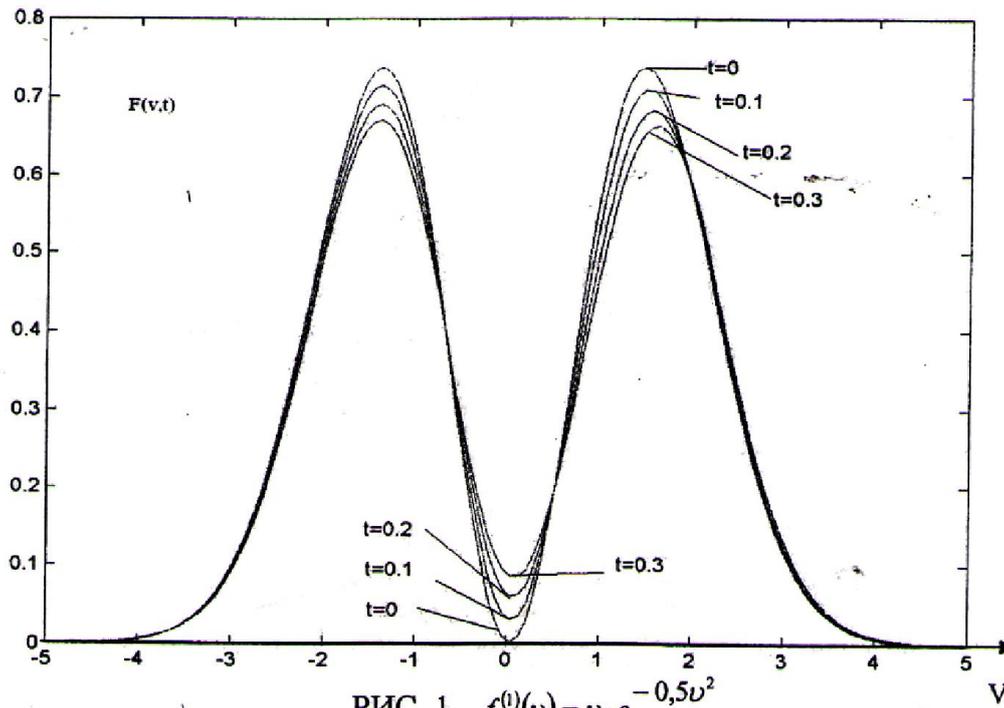


РИС. 1. $f_0^{(1)}(v) = v \cdot e^{-0,5v^2}$

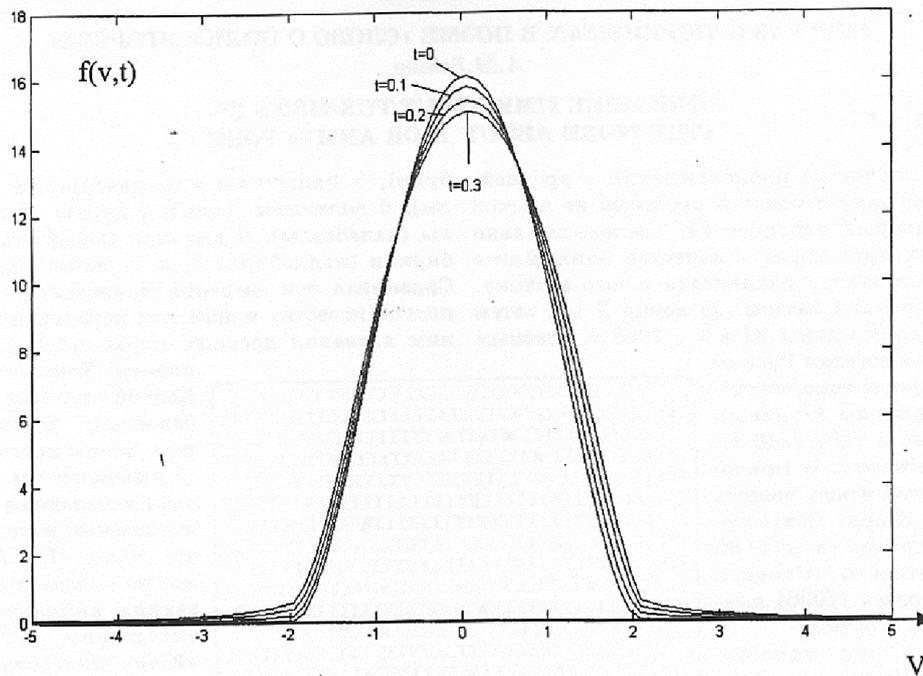


РИС. 2. $f_0^{(2)}(v) = \begin{cases} (v-2)^2(v+2)^2, & -2 \leq v \leq 2 \\ 0, & -10 \leq v < -2 \text{ и } 2 < v \leq 10 \end{cases}$

Литература

1. Frazali G, Cornelis V.M. , Van der Mee and S.L. Pavri-Fontana. Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swarms.// J.Math. Phys., Vol.30, No.5, May 1989-P.1177-1186.
2. Lods B. On linear Kinetic equations involving unbounded cross-sections.// Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2004; 27:1049-1075.
3. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема// Докл. АН, 1992. -Т.323, №3.-С 410-414.
4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема //Докл. АН, 1992. -Т.325, № 6.-С.1111-1115.
5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени//Докл. АН, 1993. - Т.329, № 5.- С. 543-546.
6. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка //Докл. РАН, 2001, - Т.379, № 1 - С. 16-21.
7. Панков П.С., Иманалиев Т.М., Кененбаева Г.М., Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента// Юбилейная научн. конф., посв. 50-летию развития математики в Академии наук Казахстана: тез. докл. - Алматы, 1995,-С.164.