Сатыбаев А.Дж.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

A.Dzh. Satybaev

EXISTENCE OF DECISIONS OF A DIRECT PROBLEM OF ACOUSTICS WITH FLAT BORDER

УДК: 517.968.22

Рассмотрено существование решения прямой задачи акустики с плоской границей и мгновенным источником по времени.

There was discerned the existence of solving the acoustics direct problem with it's plane limit and momentary source by time.

Корректность (существование, единственность, устойчивость) задач математической физики изучены многими видными учеными, такими как А.Н. Тихонов, О.А. Ладыженская, В.С. Владимиров, А.А. Самарский, В.П. Михайлов и др.

Здесь существование решение прямой задачи устанавливается в таком классе и в таком области, в котором необходимо изучение обратной задачи акустики. Рассматривается прямая задача

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\in C^2(R_+ XR),\ 0<M_1\le\overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\le M_2,\\ \overline{C}' z(+0,y)=\overline{\rho}' z(+0,y)=0,\ \left\|\overline{C},\overline{\rho}\right\|_{C^2}\le M_2,\ Supp\left\{\overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\right\}\subset \\ \left((0,d)X\left(-D_1,D_1\right)\right),\ r(y)\in C^1(R),\ Supp\{r(y)\}\in\left(-D_1,D_1\right), \end{array}\right|(2)$$

где $\delta(t)$ - дельта функция Дирака, $r(y)$ - функция источник, $\overline{C}(z,\,y)$ - скорость распространения волн, $\overline{\rho}(z,\,y)$ - плотность среды, $\nu(z,\,y,t)$ - возмущение среды.

Фундаментальные решения гиперболических задач установлены В.Г. Романовым [1].

Пусть относительно коэффициентов уравнения и начальной условии выполнены следующие условия

$$\left.\begin{array}{l} \overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\in C^2(R_+ XR),\ 0<M_1\le\overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\le M_2,\\ \overline{C}' z(+0,y)=\overline{\rho}' z(+0,y)=0,\ \left\|\overline{C},\overline{\rho}\right\|_{C^2}\le M_2,\ Supp\left\{\overline{C}(z,y),\overline{\rho}(z,y)\right\}\subset \\ \left((0,d)X\left(-D_1,D_1\right)\right),\ r(y)\in C^1(R),\ Supp\{r(y)\}\in\left(-D_1,D_1\right), \end{array}\right|(2)$$

- фиксированные постоянные.

В силу гиперболичности уравнении и условия (2), время, возмущение порожденной функцией источникам успеет достигнуть глубину d, для всех y и вернуться обратно на поверхность $z=0$, равно $T=2d\,/\,M_1,\quad D=D_1+T\cdot M_2$

Используя методы выпрямления характеристик [2] и выделения особенностей решении прямой задачи [1] получим следующую задачу, эквивалентную задаче (1), с данными на характеристиках см. [3]:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha^2}+Lu(\alpha,y,t),\ (\alpha,y,t)\in\Omega(T,D),\\ u(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t}=S(t,y),\quad t\in[0,T],\ y\in[-D,D],\\ \dfrac{\partial u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}\bigg|_{|\alpha|=t}=sign(\alpha)R(t,y),\quad t\in[0,T],\ y\in[-D,D],\\ u(\alpha,y,t)\big|_{y=-D}=u(\alpha,y,t)\big|_{y=D}=0,\ |\alpha|\le t<T, \end{array}\right\}(3)$$

где $\Omega(T,D)=\{|\alpha|<t<T,\ \alpha\in[-T,T],\ y\in(-D,D)\}$, $C(\alpha,y)=\overline{C}(z,y)$,

$\rho(\alpha,y)=\overline{\rho}(z,y),\alpha(z,y)$ - решение задачи эйконала, $u(\alpha,y,t)=\nu(z,y,t)$,

$$S(t,y)=\frac{r(y)\cdot C(0,y)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^t\Big\{C^2(\tau,y)\Big[\alpha_y(\tau,y)S_y(\tau,y)+\Delta\alpha(\tau,y)S(\tau,y)\Big]-$$

$$-\left[\frac{\rho'_\tau(\tau,y)}{\rho(\tau,y)}+\frac{\rho'_y(\tau,y)}{\rho(\tau,y)}C^2(\tau,y)\alpha_y(\tau,y)\right]S(\tau,y)\Big\}d\tau,\quad t\in(0,T),\ y\in(-D,D),$$

$$R(t,y)=\frac{1}{2}\int_0^t\Big\{C^2(\tau,y)\left[S_{yy}-\frac{\rho'_y}{\rho(\tau,y)}S_y-\frac{\rho'_\tau}{\rho(\tau,y)}\alpha_yS_y+\alpha_yR_y+\Delta\alpha R(\tau,y)\right]-$$

$$-\left[\frac{\rho'_\tau}{\rho(\tau,y)}+\frac{\rho'_y}{\rho(\tau,y)}C^2(\tau,y)\alpha_y(\tau,y)\right]R(\tau,y)\Big\}\,d\tau,\quad t\in(0,T),\ y\in(-D,D),$$

Здесь $S(t,y),\ R(t,y)$ – функции, зависящие от известных функций.

$$Lu(\alpha,y,t)=C^2(\alpha,y)\left[\frac{\partial^2u(\alpha,y,t)}{\partial y^2}+\alpha_y\frac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial y}+\Delta\alpha\frac{\partial u(\alpha,y,t)}{\partial\alpha}\right]-$$

$$-\frac{\rho'_\alpha(\alpha,y)}{\rho(\alpha,y)}u_\alpha-C^2(\alpha,y)\left[\frac{\rho'_\alpha}{\rho(\alpha,y)}\alpha_yu_y+\frac{\rho'_y}{\rho(\alpha,y)}\alpha_yu_\alpha+\frac{\rho'_y}{\rho(\alpha,y)}u_y\right],$$

$$\text{где}\qquad \Delta\alpha(z,y)=\alpha_{zz}+\alpha_{yy},\ \alpha_y=\alpha_y(z,y).$$

Обобщенным решением задачи (3) назовем функцию удовлетворяющую

$$\int_0^t\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D\left[\frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}+Lu(\alpha,y,t)\phi(\alpha,y,t)\right]dyd\alpha d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D S(\tau,y)\phi(\alpha,y,t)dyd\tau,\ t\in(0,T),\ (*).$$

$$\text{где}\ \phi(\alpha,y,t)\ \in C^2(\Omega(T,D)),$$

Используя известные разностные обозначения, напишем разностный аналог дифференциальной задачи (3):

$$\left.\begin{array}{l} u_{t\bar t}=u_{\alpha\bar\alpha}+Lu^k_{ij}+O\left(\tau,h_1,h_2\right),\ \ u^{|i|}_{\pm ij}=S_{ij},\ \ i=\overline{0,N},\ j=-\overline{L,L};\\ u^{|i|}_{\alpha,\pm ij}=R_{ij},\ \ i=\overline{0,N},\ j=-\overline{L,L};\ \ u^k_{\pm i,-L}=u^k_{\pm i,L}=0,\quad i=\overline{0,N},k=\overline{|i|,M}\end{array}\right\}(4)$$

$$\text{где}\quad h_1=T/N;\ h_2=D/L;\ \tau=T/M;\ u_{t\bar t}=\left(u^{k+1}_{ij}-2u^k_{ij}+u^{k-1}_{ij}\right)\Big/\tau^2,$$

$$u^k_{ij}=u(k\tau,ih_1,jh_2),\ u_{\bar\alpha}=\left(u^k_{ij}-u^k_{i-1j}\right)\Big/h_1,\ \ u_y=\left(u^k_{ij+1}-u^k_{ij}\right)\Big/h_2\qquad\text{и т.д.}$$

$$S_{kj}=\frac{1}{2}r_jC_{0j}+\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k}\Bigg\{C_{\ell j}^2\left[\alpha_{\overline{y}}\left(S_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+(\Delta\alpha)_{\ell j}S_{\ell j}\right]-$$

$$-\left[\frac{\left(\rho_{\overline{\tau}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}+\frac{\left(\rho_{\overline{y}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}C_{\ell j}^2\alpha_{\overline{y}}\right]S_{\ell j}\Bigg\}\cdot\tau \quad \text{–формула прямоугольников.}$$

$$R_{kj}=\frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{k}\Bigg\{C_{\ell j}^2\left[\left(S_{\overline{y}y}\right)_{\ell j}+\frac{\left(\rho_{\overline{y}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}\left(S_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+\frac{\left(\rho_{\overline{\tau}}\right)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}\left(\alpha_{\overline{y}}\right)_{\ell j}\left(S_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+\right.$$

$$\left.+\alpha_{\overline{y}}\left(R_{\overline{y}}\right)_{\ell j}+(\Delta\alpha)_{\ell j}R_{\ell j}\right]-\left[\frac{(\rho_\tau)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}+\frac{(\rho_y)_{\ell j}}{\rho_{\ell j}}C_{\ell j}^2\alpha_{\overline{y}}\right]R_{\ell j}\Bigg\}\cdot\tau.\quad k=\overline{0,M},\ j=\overline{-L,L};$$

$$Lu_{ij}^k=C_{ij}^2\left[u_{y\overline{y}}+\alpha_{\overline{y}}u_{\alpha\overline{y}}+(\Delta\alpha)_{ij}u_{\overline{\alpha}}\right]-\frac{\rho_{\overline{\alpha}}}{\rho_{ij}}u_\alpha-$$

$$-C_{ij}^2\left[\frac{\rho_{\overline{\alpha}}}{\rho_{ij}}\alpha_{\overline{y}}u_{\overline{y}}+\frac{\rho_{\overline{y}}}{\rho_{ij}}\alpha_{\overline{y}}u_\alpha+\frac{\rho_{\overline{y}}}{\rho_{ij}}u_{\overline{y}}\right].$$

Определим кусочно-непрерывную функцию $\widetilde{u}(\alpha,y,t)$ внутри параллелепипеда

$$\prod=\left\{k\tau\le t\le(k+1)\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(i+1)h_2\right\}$$

$$\widetilde{u}(\alpha,y,t)=u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{y}{\tau}\right)+u_{ij}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$

$$+u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+$$

$$+u_{i+1j+1}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)+u_{i+1j}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+$$

$$+u_{ij+1}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)+u_{i+1j+1}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right),\quad (5)$$

Пусть выполнены следующие условия

$$\left.\begin{aligned}&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(u_{ij}^k\right)^2\le A, &&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{i+1j}^k-u_{ij}^k}{h_1}\right)^2\le B_2,\\&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^k}{\tau}\right)^2\le B_1, &&\max_{|i|\le k\le M;}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij+1}^k-u_{ij}^k}{h_2}\right)^2\le B_3,\end{aligned}\right\}(6)$$

Покажем, что

$$\left.\begin{aligned}&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le A, \quad \max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_\alpha^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_2,\\ &\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_1, \quad \max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D}u_y^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_3,\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

Вычислим следующий интеграл при $t=k\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(j+1)h_2$

$$\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy=\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\left[u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\right.$$

$$\left.+u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\right]^2 d\alpha dy=$$

$$=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi,\ \frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=h_1h_2\int_0^1\int_0^1\left[u_{ij}^k(1-\xi)(1-\eta)+u_{i+1j}^k(\xi(1-\eta))+\right.$$

Обозначим $a=u_{ij}^k,\quad b=u_{i+1j}^k,\quad c=u_{ij+1}^k,\quad d=u_{ij}^{k+1}$. Тогда справедлива

$$\int_0^1\int_0^1\left[a(1-\varsigma)(1-\eta)+в(1-\eta)\cdot\varsigma+c(1-\varsigma)\eta+d\varsigma\eta\right]^2d\varsigma d\eta=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\{a^2(1-\varsigma)^2(1-\eta)^2+b^2(1-\eta)^2\cdot\varsigma^2+c^2(1-\varsigma)^2\eta^2+d^2\varsigma^2\eta^2+\right.$$

$$+2ab(1-\varsigma)\cdot(1-\eta)^2\cdot\varsigma+2ac(1-\varsigma)^2\cdot(1-\eta)\cdot\eta+2ad\cdot(1-\varsigma)(1-\eta)\cdot\varsigma\eta+$$

$$\left.+2bc(1-\eta)(1-\varsigma)\varsigma\cdot\eta+2bd(1-\eta)\varsigma^2\cdot\eta+2cd(1-\varsigma)\cdot\eta^2\cdot\varsigma\right\}d\varsigma d\eta=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}a^2(1-\eta)^2+\right.$$

$$+\frac{1}{3}b^2(1-\eta)^2+\frac{1}{3}c^2\eta^2+\frac{1}{3}d^2\eta^2+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right](1-\eta)^2+2\frac{1}{3}ac\cdot\eta(1-\eta)+$$

$$\left.+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta(1-\eta)+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\eta\cdot(1-\eta)+2bd\cdot\frac{1}{3}(1-\eta)\cdot\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta^2\right\}d\eta=$$

$$=\frac{\alpha^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{b^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{c^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+\frac{d^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot$$

$$\cdot\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{2ac}{3}\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+$$

$$+2bd\frac{1}{3}\int_0^1(1-\eta)\cdot\eta d\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\int_0^1\eta^2d\eta==\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{2ac}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+\frac{2bd}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2cd\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+$$

$$+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+\frac{ab}{9}+\frac{ac}{9}+\frac{ad}{18}+\frac{bc}{18}+\frac{bd}{9}+\frac{cd}{9}\le\frac{1}{9}\left[a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+\frac{ad}{2}+\right.$$

Очевидно, что

$$\widetilde{u}(\alpha,y,t)=(k+1-\frac{t}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t}{\tau}-k)\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)=$$
$$=\left[(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)\right]. \quad (9)$$

Это означает линейность функции. Отсюда

$$\widetilde{u}^2(\alpha,y,t)=(1-\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+2(1-\frac{t-k\tau}{\tau})(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)+$$
$$+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\le 2\left[(1-(\frac{t-k\tau}{\tau}))^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\right]\le$$
$$\le(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau). \quad (10)$$

Тогда очевидно, что при $\tau k\le t\le(k+1)\tau$ или $0\le\frac{t-\tau k}{\tau}\le 1$ справедливо следующее неравенство

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\begin{cases}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\\ \int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\end{cases}\le$$
$$\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}(u_{ij}^k)^2\le A. \quad (11)$$

Это означает справедливость первого неравенства формулы (7).

Докажем, что $\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_1$,

если $\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^k}{\tau}\right]^2\le B_1$.

При $t=k\tau$, $ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1$, $ih_2\le y\le(j+1)h_2$ рассмотрим

$$\widetilde{u}_t(\alpha,y,t)=u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau})+u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau}+$$
$$+u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau})+u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau})+$$
$$+u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau})+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau}+$$
$$+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau}+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau}=$$

$$=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}+\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+$$

$$+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}.$$

Суммировав на всем интервале и обозначая

$$a_1=\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau},b_1=\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau},c_1=\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau},$$

$d_1=\dfrac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}$, получим $h_1h_2\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(y+1)h_1}\widetilde{u}_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy=$

$$=h_1h_2\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(i+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}+\right.$$

$$\left.+\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)*\right.$$

$$\left.+\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}\right]^2 d\alpha dy=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi\quad\frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=$$

$$=h_1h_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[(1-\xi)(1-\eta)a_1+\xi(1-\eta)b_1+(1-\xi)\eta c_1+\xi\eta d_1\right]^2 d\xi d\eta=h_1h_2\frac{1}{4}\left[a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\right].\quad(12)$$

Из последнего вытекает

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}u_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{j=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right]^2\le B_1.$$

Можно показать линейность функций $\widetilde{u}_t(\alpha,y,t)$

Докажем $\max\limits_{|\alpha|\le t\le T}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\widetilde{u}_\alpha^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_2,$

если $\max\limits_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left[\dfrac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}\right]^2\le B_2.$

Вычислим в прямоугольнике $t=\kappa\tau\ \ ih_1<\alpha<(i+1)h_1,\ \ jh_2<y\le(j+1)h_2$ следующие

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha,\gamma,t)=\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{h_2}\right)\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}+\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\frac{u^{k+1}_{i+1j}-u^{k+1}_{ij}}{h_1}+$$

$$+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_1}+(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{t}{\tau}-k)\frac{u^{k+1}_{i+1j+1}-u^{k+1}_{ij+1}}{h_1};$$

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha,y,k\tau)=(j+1-\frac{y}{h_2})\cdot\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}+(\frac{y}{h_2}-j)\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_2};$$

Проинтегрируем $\tilde{u}^2_\alpha(\alpha,y,\kappa\tau)$

$$\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\tilde{u}^2_\alpha(\alpha,y,\kappa\tau)d\alpha dy=\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[(i+1-\frac{y}{h_2})\cdot\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}+\right.$$

$$\left.+(\frac{y}{h_2}-j)\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_2})\right]^2 d\alpha dy=\begin{vmatrix}\eta=\frac{y}{h_2}-j, & \frac{\alpha}{h_1}-i=\xi\\ dy=h_2 d\eta & d\alpha=h_1 d\xi\end{vmatrix}=$$

$$=h_1h_2\int\limits_0^1\left[(1-\eta)\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}+\eta\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_1}\right]^2 d\eta=$$

$$\left|\text{обозначая }\ a_2=\left(u^k_{i+1j}-u^k_{ij}\right)/h_1,\quad b_2=\left(u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}\right)/h_1\right|=$$

$$=h_1h_2\int\limits_0^1\left[(1-\eta)^2\cdot\alpha_2^2+2(1-\eta)\cdot\eta a_2b_2+\eta^2b_2^2\right]d\eta=$$

$$=h_1h_2\left[\frac{1}{3}a_2^2+2a_2b_2\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+\frac{1}{3}b_2^2\right]\le h_1h_2\left[\frac{1}{3}a_2^2+\frac{1}{2}a_2^2+\frac{1}{2}b_2^2-\frac{1}{3}a_2^2-\frac{1}{3}b_2^2+\frac{1}{3}b_2^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}h_1h_2\left[a_2^2+b_2^2\right]\le\frac{h_1h_2}{2}\left[\left(\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}\right)^2+\left(\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_1}\right)^2\right].$$

Суммируя последнее при $i=\overline{-N,N},\ j=\overline{-L,L}$

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\tilde{u}^2_\alpha(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}$$

$$\left[\left(\frac{u^k_{i+1j}-u^k_{ij}}{h_1}\right)^2+\left(\frac{u^k_{i+1j+1}-u^k_{ij+1}}{h_1}\right)^2\right]\le B_2. \qquad (13)$$

Литература:

1. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - Москва: Наука, 1984. - 264 с.
2. Кабанихин С.И. Проекционно - разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение,1988. -168с.
3. Сатыбаев А. Дж., Мирсайитова М.Э. Обратная задача акустики с плоской границей//Наука. Образование. Техника. /Международный научный журнал №2(4) . Ош, 2000. - С. 101-104.