DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 5, 2023

МАТЕМАТИКА ИЛИМДЕРИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
MATHEMATICAL SCIENCES

*Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.*

# ЭКИ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ЖЫЛМАКАЙ БЕРИЛИШТЕГИ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ВОЛЬТЕРРАНЫН СЫЗЫКТУУ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИН РЕГУЛЯРДОО

*Каракеев Т.Т., Мустафаева Н.Т.*

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМ И ГДАДКИМИ ДАННЫМИ

*T. Karakeev, N. Mustafaeva*

# REGULARIZATION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS THE FIRST KIND WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES AND SMOOTH DATA

*УДК: 517.968.22*

*Макалада эки көз карандысыз өзгөрүлмөлүү биринчи түрдөгү Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелерин үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде регулярдоо маселеси изилденет. Теңдемедеги белгилүү функциялардын дифференцирлеүүчү учуру каралат. Берилген дифференциалдык оператордун негизинде биринчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемелеси үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеге келтирилет.Үүчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемелениннегизинде Лаврентьевдик типтеги регулярдоо методун негиздөөнү камсыздаган ядронун шарттары берилген. Регулярдалган чыгарылыштын так чыгарылышка бир калыпта жыйналуусу жана теңдеменин чыгарылышынын үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде жалгыздыгы далилденген.*

***Негизги сөздөр:*** *регулярдоо, Вольтерранын теңдемелери, бир калыпта жыйналуу, кичи параметр.*

*В работе исследованы вопросы регуляризации линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве непрерывных функций. Рассматривается случай, когда известные функции в уравнении являются дифференцируемыми. С помощью некоторого дифференциалного оператора интегральное уравнение Вольтерра первого рода сводится к эквивалентному, в смысле разрешимости, линейному интегральному уравнению третьего рода. Получены условия для ядра уравнения, обеспечивающие обоснования метода регуляризации лаврентьевского типа на основе интегрального уравнения третьего рода. Доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению по равномерной метрике и единственность решения уравнения в пространстве непрерывных функций с двумя независимыми переменными.*

***Ключевые слова:*** *регуляризация, уравнение Вольтерра, равномерная сходимость, малый параметр.*

*The paper examines the issues of regularization of linear Volterra integral equations of the first kind with two independent variables in the space of continuous functions. The case is considered when the known functions in the equation are differentiable. With the help of a certain differential operator, the Volterra integral equation of the first kind is reduced to an equivalent, in the sense of solvability, linear integral equation of the third kind. Conditions for the kernel of the equation are obtained that provide justification for the Laurentian type regularization method based on an integral equation of the third kind. The convergence of the regularized solution to the exact solution with respect to the uniform metric and the uniqueness of the solution to the equation in the space of continuous functions with two independent variables are proved.*

***Key words:*** *regularization, Volterra equation, uniform convergence, small parameter.*

В работах [1-6] исследованы вопросы регуляризируемости интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В [7-10] построены регуляризирующие операторы для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода. В указанных работах методы регуляризации относятся к методам лаврентьевского типа и сохраняют свойство вольтерровости уравнения. В данной работе интегральное уравнение Вольтерра первого рода с гладкими данными сводится к уравнению третьего рода на основе которого строится регуляризирующий оператор.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x K(x,y,s)u(s,y)ds + \int_0^x\int_0^y Q_0(x,y,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds = g(x,y), \qquad (1)$$

где известные функции $K(x,y,s)$, $Q_0(x,y,s,\tau)$, $g(x,y)$ подчиняются условиям:

*a)* $\quad g(x,y) \in C(D), D = [0,b] \times [0,c], g(0,y) = 0;$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 5, 2023

*б)* $K(x,y,s) \in C^{1,0,0}(D_0),\ \ D_0 = \{(x,y,s)/0 \le s \le x \le b, 0 \le y \le c\}$;

*в)* $Q_0(x,y,s,\tau) \in C^{1,0,0,0}(D_1),\ \ D_1 = \{(x,y,s,\tau)/\ 0 \le s \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le y \le c\}$.

Пусть $I$ – тождественный оператор, $D = d/dx$ - дифференциальный оператор, $0 < C_1 = const$. Действуя оператором $C_1 I + D$ из уравнения (1), получим уравнение третьего рода.

$$p(x,y)u(x,y) + \int_0^x G(s,y)u(s,y)ds = \int_0^x L(x,y,s)u(s,y)ds +$$

$$+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\,u(s,\tau)d\tau ds + f(x,y), \qquad (2)$$

где $G(s,y) = C_1 K(s,y,s) + K_x(s,y,s),\ \ p(x,y) = K(x,y,x)$,

$$L(x,y,s) = C_1\big(K(s,y,s) - K(x,y,s)\big) + K_x(s,y,s) - K_x(x,y,s),$$

$$Q(x,y,s,\tau) = -C_1 Q_0(x,y,s,\tau) - Q_{0x}(x,y,s,\tau), \qquad f(x,y) = C_1 g(x,y) + g_x(x,y)$$

Рассмотрим уравнение с малым параметром $\varepsilon$ из интервала (0,1)

$$\big(\varepsilon + p(x,y)\big)u_\varepsilon(x,y) + \int_0^x G(s,y)\,u_\varepsilon(s,y)ds = \int_0^x L(x,y,s)\,u_\varepsilon(s,y)ds +$$

$$+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + \varepsilon u(0,y) + f(x,y). \qquad (3)$$

С помощью резольвенты

$$-\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)G(s,y)$$

ядра $\Big(-G(s,y)/\big(\varepsilon + p(x,y)\big)\Big)$ уравнение (3) сводим к эквивалентному виду

$$u_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\,\times\right.$$

$$u_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)u_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu -$$

$$\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\,u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu + f(s,y) - f(x,y)\right\}ds +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\,u_\varepsilon(s,y)ds +\right.$$

$$\left.+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\,u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + f(x,y)\right\}. \qquad (4)$$

**Теорема.** Пусть выполняются условия *а)* – *в)*, $G(x,y) \ge d_1 > 0$, $f(0,y) = 0$, $Q(x,y,x,\tau) = 0$, $p(0,y) = 0$, $p(x,y) > 0$, $\forall x \in (0,b], \forall y \in [0,c]$, $p(x,y)$ – неубывающая по $x$ функция в области $D$. Если уравнение (1) имеет решение $u(x,y) \in C(D)$, то, при $\varepsilon \to 0$, решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)\|_{C(D)} \le M_1\left(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u\big(\varepsilon^\beta\big)\right),$$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 5, 2023

где $\quad \omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup_{\substack{|x-s|\leq\varepsilon^\beta \\ y\in[0,c]}} |u(x,y) - u(s,y)|, \qquad 0 < \beta < 1,\ 0 < M_1 = const,$

$\|\cdot\|_{C(D)} = \max_D |\cdot|.$

**Доказательство.** Пусть $\eta_\varepsilon(x,y) = u_\varepsilon(x,y) - u(x,y)$, где $u(x,y)$ – решение уравнения (1). Тогда из (4) получим уравнение

$$\eta_\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \left\{ \int_0^s L(s,y,\nu) \right.$$

$$\times\, \eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu + \int_0^s \int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\, d\tau d\nu -$$

$$\left. - \int_0^x \int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\, \eta_\varepsilon(\nu,\tau) d\tau d\nu + \varepsilon\big(u(s,y) - u(x,y)\big) \right\} ds +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)}\right) \left\{ \int_0^x L(x,y,s)\, \eta_\varepsilon(s,y)ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds + \varepsilon[u(0,y) - u(x,y)] \right\}. \qquad (5)$$

Поскольку $p(x,y)$ неубывающая функция по $x$ в области $D$, то при $\nu \leq x$

$$\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \leq \frac{1}{\varepsilon + p(\nu,y)}, (x,y) \in D\,.$$

Тогда используя условие $G(x,y) \geq d_1, (x,y) \in D$, для функции

$$L_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} (x-s)ds$$

получим

$$|L_\varepsilon(x,y)| \leq d_1^{-1} \int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu\, ds =$$

$$= d_1^{-1} \int_0^{W_\varepsilon(x,y,0)} e^{-\rho}\rho d\rho < d_1^{-1} \int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho = d_1^{-1}.$$

На основе неравенства

$$|L(x,y,\nu) - L(s,y,\nu)| \leq M_2(x-s),$$

$$|Q(x,y,\nu,\tau) - Q(s,y,\nu,\tau)| \leq M_3(x-s),$$

где $M_2 = C_1 L_K + L_{K1},\ M_3 = C_1 L_{Q_0} + L_{Q1},\ L_K = Lip(K(x,y,s)|x),$

$L_{K1} = Lip(K_x(x,y,s)|x),\ L_{Q_0} = Lip(Q_{0x}(x,y,\nu,\tau)|x),$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557



$$L_{Q1} = Lip(Q_{0x}(x,y,\nu,\tau)|x),$$

имеем

$$\left|-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.\right.$$

$$\times\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu-\int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu+\int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu-$$

$$\left.\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\,\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu\right\}ds\right|\le 2(M_2+M_3)|L_\varepsilon(x,y)|\times$$

$$\times\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu+\ +\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\};$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\,\eta_\varepsilon(s,y)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds\right\}\right|\le(M_2+M_3)\frac{d_1^{-1}}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\times$$

$$\times\,exp\left(-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu\right)\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\ +\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\}\le$$

$$\le(M_2+M_3)d_1^{-1}e^{-1}\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\ +\int_{0,}^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\},$$

$$\sup_{\rho\ge0}[\rho e^{-\rho}]\le e^{-1},\qquad \rho=\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x G(\nu,y)d\nu.$$

В силу полученных оценок из (5) имеем

$$|\eta_\varepsilon(x,y)|\le M_0\left\{\int_0^x|\eta_\varepsilon(\nu,y)|\,d\nu\ +\int_0^x\int_0^y|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)|\,d\tau d\nu\right\}+\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)},$$

где $M_0=(M_2+M_3)d_1^{-1}(2+e^{-1}),$

$$(H_\varepsilon u)(x,y)\equiv\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)[u(0,y)-u(x,y)]-$$

$$-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}[u(s,y)-u(x,y)]ds.$$

DOI:10.26104/IVK.2023.45.557

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ КЫРГЫЗСТАНА, № 5, 2023

Отсюда, используя аналог неравенства Гронуолла-Беллмана [11, с. 59] получим

$$|\eta_\varepsilon(x,y)| \le \exp\big(bM_0(1+c)\big)\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)}.$$

Перейдем к норме в $C(D)$ и используем оценку [7]

$$\|(H_\varepsilon u)(x,y)\|_{C(D)} \le 4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\|u(x,y)\|_{C(D)} + \omega_u(\varepsilon^\beta), \qquad 0<\beta<1,$$

при $\varepsilon \to 0$, получим, что регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,y) \to u(x,y)$ равномерно. Теорема доказана.

**Следствие.** При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

**Литература:**

1. Булатов М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42, № 3. – С. 330-335.
2. Иманалиев М.И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода. / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып. 21. – С. 3-38.
3. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А.М. Денисов // ЖВМиМФ, 1975. - №15 (4). – С. 1053-1056.
4. Магницкий Н.А. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра I рода/ Н.А. Магницкий //Вестник МГУ, 1978. - №1. - С.91-96.
5. Сергеев В.О. Регуляризация уравнений Вольтерра первого рода/ В.О. Сергеев //ДАН СССР, 1971.- 197 (3). - С. 531-534.
6. Янно Я. Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода равносильного уравнению III рода / Я.Янно //Учен. зап. Тартуск. гос. ун–та, 1987. – Вып. 762. – С. 16-30.
7. Асанов А. Нелинейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными/ А.Асанов, А.Максутов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 2000. – Вып.29. – С. 122-129.
8. Омуров Т.Д. Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач. / Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев. - Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.
9. Глушак А.В. Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера-Дарбу/ А.В. Глушак, Т.Т. Каракеев // ЖВМиМФ. – 2006. – Т. 46. - № 5. – С. 848-857.
10. Karakeev T.T. Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind / T.T. Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics, 2020, 41 (9), 1816–1821.
11. Филатов А.Н. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М., 1976. - 67с.